Изв. АН Эстонии. Физ. Матем., 1991, 40, № 2, 115—121
https://doi.org/10.3176/phys.math.1991.2.08

УДК 534.2 : 532.135

Анатолий СТУЛОВ *

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН ДЕФОРМАЦИИ В ДИСКРЕТНО-СЛОИСТЫХ ЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ С ПАМЯТЬЮ

(Представил Ю. Энгельбрехт)

Настоящая статья завершает цикл работ, проведенных в Институте кибернетики АН Эстонии в области распространения одномерных продольных волн деформации в линейных слоистых наследственных средах. Основные результаты по данной тематике были опубликованы в [1–5]. В [1] — первой работе в этой области — была поставлена задача о распространении волны деформации в наследственной среде и были введены модифицированные ядра наследственности. Затем в [2] полученные результаты были обобщены на дискретно-слоистую наследственную среду. Некоторые частные случаи распространения и отражения волн были рассмотрены в [3–5]. В [3] и [4] были предложены методы для определения наследственных параметров среды по отраженному акустическому сигналу, а в [5] изучена эволюция формы нестационарной акустической волны в наследственной среде со слабосингулярным ядром.

Однако вопрос о распространении прямой волны деформации в наследственной среде в этих работах исследован недостаточно. Так, если в [2–4] были представлены точные формулы, описывающие форму отраженной волны для случаев различных наследственных слоистых сред и для различных краевых условий и были предложены методы для определения наследственных свойств среды по измеряемым искажениям отраженной волны, то прямая волна в этих работах вообще не рассматривалась. В настоящей статье приводится постановка задачи и на базе самого общего решения, полученного в [2], исследуется распространение прямой волны в наследственной среде с так называемой E-памятью. Получены точные решения для различных видов краевых воздействий, что позволяет следить за искажением формы акустической волны, распространяющейся в среде с памятью и несущей полезную информацию о наследственных свойствах среды.

1. Система интегро-дифференциальных уравнений первого порядка, описывающая распространение волн в линейной наследственной (вязкоупругой) среде в положительном и отрицательном направлении оси x, была получена в работе [2]. В настоящей статье эти уравнения используются для описания процесса распространения одномерных нестационарных продольных волн деформации в слоисто-однородных линейных наследственных средах.

Пусть одномерный импульс, который зависит от лагранжевой координаты x и от времени t, распространяется в среде, состоящей из области $0 \leqslant x \leqslant L_A$, занятой однородной средой A и слоя $L_A < x < L_B$, являющимся однородной средой B и полупространства $x \geqslant L_B$ — среды C и при этом направление распространения волны перпендикулярно плоскостям раздела сред. Величины, относящиеся к средам A, B и C, будем различать соответственно с помощью индексов $j \in A, B, C$.

* Eesti Teaduste Akadeemia Küberneetika Instituut (Институт кибернетики Академии наук Эстонии). 200108 Tallinn, Akadeemia tee, 21. Estonia.

Примем обозначения: $U_j(x,t)$ — продольные перемещения, $\sigma_j(x,t)$ — продольные напряжения, ϱ_j — плотности и E_j — «мгновенные модули упругости» сред A, B и C. Пусть штрих обозначает производную по x, а точка — производную по t. Тогда для описания процесса распространения одномерных импульсов в наследственных средах A, B и C имеем уравнения [2]:

$$c_j U'_{j1}(x,t) + \dot{U}_{j1}(x,t) + \frac{1}{2} K_{1j}(t) * \dot{U}_{j1}(x,t) = 0, \tag{1}$$

$$c_j U'_{j2}(x,t) - \dot{U}_{j2}(x,t) - \frac{1}{2} K_{1j}(t) * \dot{U}_{j2}(x,t) = 0, \tag{2}$$

где

$$c_j^2 = E_j/\varrho_j, \quad j \in A,\ B,\ C. \tag{3}$$

Здесь второй индекс, принимающий значения 1 и 2, введен таким образом, что величины $U_{j1}(x,t)$ обозначают совокупность импульсов, многократно отраженных и преломленных в слоистой среде, распространяющихся в положительном направлении оси x, а величины $U_{j2}(x,t)$ — совокупность таких же импульсов, распространяющихся в противоположном направлении.

В уравнениях (1) и (2) $K_{1j}(t)$ являются введенными в работе [1] модифицированными ядрами ползучести сред A, B и C, связанными с классическим ядром ползучести уравнением

$$K_j(t) = K_{1j}(t) + \frac{1}{4} K_{1j}(t) * K_{1j}(t), \quad j \in A,\ B,\ C. \tag{4}$$

В уравнениях (1), (2) и (4) для краткой записи интеграла свертки использовано обозначение

$$F(t) * G(t) \equiv \int_0^t F(t-\tau)\, G(\tau)\, d\tau. \tag{5}$$

Примем начальные условия в виде

$$U_{j1}(x,0) = \dot{U}_{j2}(x,0) = 0, \quad j \in A,\ B,\ C, \tag{6}$$

$$U_{j2}(x,0) = \dot{U}_{j1}(x,0) = 0, \quad j \in A,\ B,\ C. \tag{7}$$

В точке $x = x_0$ может быть задано одно из следующих краевых условий, определяющее волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x:

$$U'_{A1}(x_0,t) = \Phi(t), \tag{8}$$

$$\dot{U}_{A1}(x_0,t) = -c_A \Phi(t), \tag{9}$$

$$\sigma_{A1}(x_0,t) = E_A \Phi(t). \tag{10}$$

На границах сред в точках $x = L_A$ и $x = L_B$ зададим обычные контактные условия, определяющие равенство нормальных перемещений и напряжений.

2. Для вычисления импульсов $U_{A1}(x,t)$, $U_{A2}(x,t)$, $U_{B1}(x,t)$, $U_{B2}(x,t)$, $U_{C1}(x,t)$, возникающих в трехслойной среде, используем интегральное преобразование Лапласа

$$F^L(x,s) \div F(x,t), \tag{11}$$

где $F^L(x,s)$ — изображение оригинала $F(x,t)$. Выполняя преобразование уравнений (1) и (2) с учетом вышеуказанных краевых и контактных условий, получим следующие формальные решения

$$U^L_{A1}(x,s)=P^L_m(s)\exp[-\lambda_A(s)x], \quad (12)$$

$$U^L_{A2}(x,s)=P^L_m(s)V^L_{AB}(s)\exp[\lambda_A(s)x], \quad (13)$$

$$U^L_{B1}(x,s)=P^L_m(s)W^L_{AB}(s)\exp[-\lambda_B(s)x], \quad (14)$$

$$U^L_{B2}(x,s)=P^L_m(s)V^L_{BC}(s)\exp[\lambda_B(s)x], \quad (15)$$

$$U^L_{C1}(x,s)=P^L_m(s)W^L_{BC}(s)\exp[-\lambda_C(s)x]. \quad (16)$$

Здесь три функции $P_m{}^L(s)$ $(m=1,2,3)$ соответствуют трем различным краевым условиям (8)—(10) следующим образом:
в случае краевого условия (8)

$$P^L_1(s)=-\lambda^{-1}_A(s)\Phi^L(s)\exp[\lambda_A(s)x_0], \quad (17)$$

в случае краевого условия (9)

$$P^L_2(s)=-c_A s^{-1}\Phi^L(s)\exp[\lambda_A(s)x_0], \quad (18)$$

в случае краевого условия (10)

$$P^L_3(s)=-(c_A/s)^2\lambda_A(s)\Phi^L(s)\exp[\lambda_A(s)x_0], \quad (19)$$

причем

$$\lambda_j(s)=(s/c_j)\left[1+\frac{1}{2}K^L_{1j}(s)\right], \quad j\in A,B,C. \quad (20)$$

Коэффициенты $V^L_{AB}(s)$, $V^L_{BC}(s)$, $W^L_{AB}(s)$, $W^L_{BC}(s)$ определяются из системы алгебраических уравнений, соответствующих преобразованным краевым условиям, и имеют вид:

$$V^L_{AB}(s)=Q_1(s)Q^{-1}_0(s)\exp[-2\lambda_A(s)L_A],$$

$$V^L_{BC}(s)=2D_{AB}(s)Q_2(s)Q^{-1}_0(s)\exp\{-L_A[\lambda_A(s)+\lambda_B(s)]\},$$

$$W^L_{AB}(s)=2D_{AB}(s)Q_3(s)Q^{-1}_0(s)\exp\{L_A[\lambda_B(s)-\lambda_A(s)]\},$$

$$W^L_{BC}(s)=4D_{AC}(s)Q^{-1}_0(s)\exp[L_B\lambda_C(s)-L_A\lambda_A(s)],$$

где

$$Q_0(s)=[D_{AB}(s)-1]Q_2(s)+[D_{AB}(s)+1]Q_3(s),$$

$$Q_1(s)=[D_{AB}(s)+1]Q_2(s)+[D_{AB}(s)-1]Q_3(s),$$

$$Q_2(s)=[D_{BC}(s)-1]\exp[-\lambda_B(s)(L_B-L_A)],$$

$$Q_3(s)=[D_{BC}(s)+1]\exp[\lambda_B(s)(L_B-L_A)],$$

$$D_{jk}(s)=Z_{jk}N^L_k(s)/N^L_j(s), \quad j,k\in A,B,C,$$

$$Z_{jk}(s)=(\varrho_j c_j)/(\varrho_k c_k), \quad j,k\in A,B,C,$$

$$N^L_j(s)=1+\frac{1}{2}K_{1j}(s), \quad j\in A,B,C.$$

Используя формулы (17)—(19), легко получить из уравнений (12)—(16) следующие формальные решения (здесь третий индекс $m=1,2,3$ относится к краевым условиям (8), (9) и (10) соответственно):

$$U'_{jkm}(x,t)=(-1)^{k-1}c_A c^{-1}_j\Phi(t)*Q_{jkm}(x,t), \quad (21)$$

$$U^{\cdot}_{jkm}(x,t)=-c_A\Phi(t)*P_{jkm}(x,t), \quad (22)$$

$$\sigma_{jkm}(x,t)=(-1)^{k-1}E_j c_A c^{-1}_j\Phi(t)*G_{jkm}(x,t), \quad (23)$$

где $Q_{jkm}(x,t)$, $P_{jkm}(x,t)$, $G_{jkm}(x,t)$ — функции, подлежащие вычислению по их изображениям

$$Q^L_{jkm}(x,s)=N^L_j(s)P^L_{jkm}(x,s), \qquad j\in A,B,C, \tag{24}$$

$$G^L_{jkm}(x,s)=[N^L_j(s)]^{-1}P^L_{jkm}(x,s), \qquad j\in A,B,C, \tag{25}$$

$$P^L_{jkm}(x,s)=[N^L_j(s)]^{m-2}\Omega^L_{jk}(x,s)\exp[\lambda_A(s)x_0], \tag{26}$$

где

$$k=1,2;\ m=1,2,3,$$

$$\Omega^L_{A1}(x,s)=\exp[-\lambda_A(s)x], \tag{27}$$

$$\Omega^L_{A2}(x,s)=V^L_{AB}(s)\exp[\lambda_A(s)x], \tag{28}$$

$$\Omega^L_{B1}(x,s)=W^L_{AB}(s)\exp[-\lambda_B(s)x], \tag{29}$$

$$\Omega^L_{B2}(x,s)=V^L_{BC}(s)\exp[\lambda_B(s)x], \tag{30}$$

$$\Omega^L_{C1}(x,s)=W^L_{BC}(s)\exp[-\lambda_C(s)x]. \tag{31}$$

3. Используем полученные формулы для описания процесса распространения импульса в наследственной среде A. Пусть в точке $x_0=0$ среды A генерирован импульс $U^{\cdot}_{A1}(0,t)=\Phi(t)$ (краевое условие (9)), который распространяется в направлении роста x. При этом из формул (21—23) будем рассматривать только решение (22), для которого введем обозначение

$$U^{\cdot}_{A12}(x,t)=-c_AF_{A1}(x,t). \tag{32}$$

Тогда точное решение, описывающее распространяющийся импульс, строится при помощи формул (22), (26), (27) и имеет вид

$$F_{A1}(x,t)=\Phi(t)*P_{A12}(x,t), \tag{33}$$

где оригинал $P_{A12}(x,t)$ находится по изображению

$$P^L_{A12}(x,s)=\exp[-\lambda_A(s)x]. \tag{34}$$

Чтобы найти оригинал функции $P^L_{A12}(x,s)$ необходимо выбрать модель наследственной среды A. Для этого используем модель наследственной среды с E-памятью, введенную У. К. Нигулом в работе [1].

Модифицированное ядро ползучести такой среды определяется выражением

$$K_{1A}(t)=2M_A\exp(-t/\tau_{1A}), \tag{35}$$

где

$$M_A=\tau^{-1}_{2A}-\tau^{-1}_{1A}, \tag{36}$$

и τ_{1A}, τ_{2A} — наследственные параметры среды, удовлетворяющие условию

$$0<\tau_{2A}<\tau_{1A}<\infty. \tag{37}$$

Введем параметр $\varepsilon_A>0$ так, чтобы

$$2M_A=\varepsilon_A/\tau_{1A}. \tag{38}$$

Тогда

$$K_{1A}(t)=(\varepsilon_A/\tau_{1A})\exp(-t/\tau_{1A}). \tag{39}$$

Если среда A является наследственной средой с E-памятью, то применяя преобразование Лапласа к (39), найдем

$$K^L_{1A}(s)=2A_A(s), \tag{40}$$

$$\lambda_A(s)=s[1+A_A(s)]/c_A, \tag{41}$$

где

$$A_A(s)=\varepsilon_A/2(1+s\tau_{1A}). \tag{42}$$

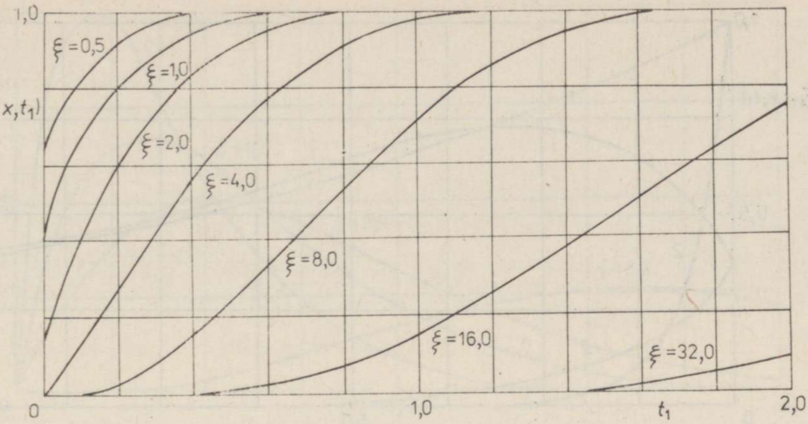

Рис. 1. Формы волны для различных безразмерных расстояний ξ. Краевое воздействие $\Phi(t)=H(t)$.

Представим $\lambda_A(s)$ в виде

$$\lambda_A(s)=\frac{s}{c_A}+\frac{\varepsilon_A}{2c_A\tau_{1A}}-\frac{A_A(s)}{c_A\tau_{1A}}. \tag{43}$$

Тогда для нахождения оригинала изображения (43) заметим, что [6]

$$s^{-1}\exp(\xi/s) \div I_0(2\sqrt{\xi t}),$$

где $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Применяя теорему о сдвиге аргумента у изображения, найдем

$$P_{A12}(x,t_1)=e^{-\xi}\left[\delta(t_1)+H(t_1)e^{-t_1}\frac{d}{dt_1}I_0(2\sqrt{\xi t_1})\right], \tag{44}$$

где использованы безразмерные переменные

$$t_1=(t-x/c_A)/\tau_{1A}, \tag{45}$$

$$\xi=\varepsilon_A x/2c_A\tau_{1A}, \tag{46}$$

а $\delta(x)$ и $H(x)$ — функции Дирака и Хевисайда соответственно.

4. Рассмотрим случай краевого воздействия в виде функции Хевисайда

$$\Phi(t)=H(t). \tag{47}$$

Свертывая (44) и (47), для краевого воздействия (47) получим формулу

$$F_{A1}(x,t_1)=e^{-\xi}\left[e^{-t_1}I_0(2\sqrt{\xi t_1})+\int_0^{t_1}e^{-\tau}I_0(2\sqrt{\xi\tau})\,d\tau\right]. \tag{48}$$

На рис. 1 представлены результаты вычисления функции $F_{A1}(x,t_1)$ по формуле (48) в безразмерных переменных, заданных формулами (45), (46) при различных значениях параметра ξ. На фронте $t_1=0$ затухание разрыва в волне носит экспоненциальный характер. С увеличением параметра ξ наблюдается затягивание роста амплитуды волны в сторону больших t_1, что хорошо совпадает с результатами, полученными в работе [7]. Все кривые стремятся к асимптотическому значению $F_{A1}(x,t_1)=1$, что можно получить, устремив верхний предел интегрирования в (48) t_1 к бесконечности. Используя значение интеграла [8]

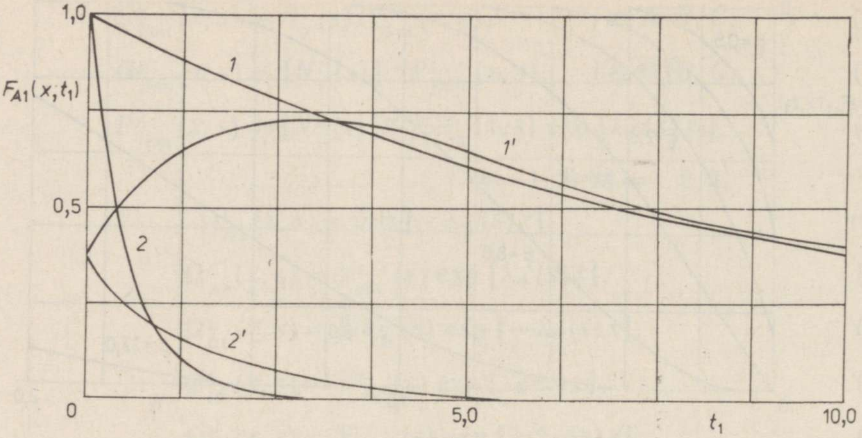

Рис. 2. Форма волны в точке $\xi=1$ для различных значений параметра α краевого воздействия $\Phi(t)=\exp(-\alpha t)$.

$$\int_0^\infty \exp(-\alpha x) I_0(2\sqrt{\xi x})\, dx=\alpha^{-1}\exp(\xi/\alpha), \tag{49}$$

получим при $t_1=\infty$

$$F_{A1}(x, t_1)=e^{-\xi}[e^{-t_1}I_0(2\sqrt{\xi t_1})+e^{\xi}]=1.$$

5. Рассмотрим другой частный случай краевого воздействия в виде экспоненты

$$\Phi(t)=\exp(-\alpha t). \tag{50}$$

Свертывая (44) и (50), найдем

$$F_{A1}(x, t_1)=e^{-\xi}[e^{-t_1}I_0(2\sqrt{\xi t_1})+\beta e^{-\alpha t_1}\int_0^{t_1} e^{-\beta\tau}I_0(2\sqrt{\xi\tau})\, d\tau], \tag{51}$$

где $\beta=1-\alpha$.

На рис. 2 представлены результаты вычисления формы волны по формуле (51) для безразмерного расстояния $\xi=1$. Кривые *1* и *2* показывают форму краевого воздействия для $\alpha=0,1$ и $\alpha=2,0$ соответственно, а кривые со штрихами — форму волны для тех же величин параметра α в точке $\xi=1$. Хотя значение амплитуды волны на фронте с ростом ξ падает экспоненциально, видно, что при соответствующем выборе параметра α монотонное краевое воздействие за фронтом распространяющейся волны может и возрастать (кривая *1'*).

6. В случае краевого воздействия в виде

$$\Phi(\mu)=\mu\exp(1-\mu), \quad \mu=t/\tau_{1A}, \tag{52}$$

из (44) и (52) получим

$$F_{1A}(x, t_1)=\exp(1-\xi-t_1)\sqrt{\frac{t_1}{\xi}}\, I_1(2\sqrt{\xi t_1}). \tag{53}$$

Это единственное решение, которое описывает форму распространяющейся волны в среде с E-памятью в явном виде через табличную модифицированную функцию Бесселя первого рода первого порядка и не требует вычисления интеграла. На рис. 3 представлена эволюция формы волны, вызванной краевым условием (52) для различных безразмерных переменных расстояний ξ. Очевидно, что колоколообразность импульса с ростом ξ сохраняется, но его максимальная амплитуда при этом быстро уменьшается.

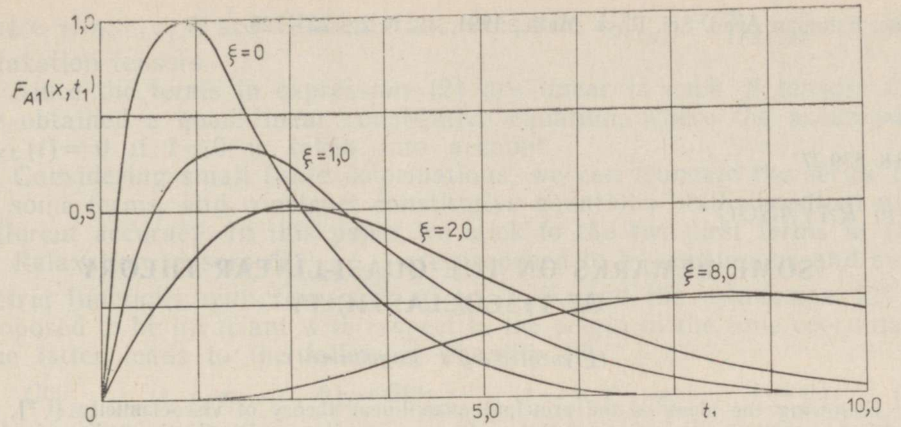

Рис. 3. Форма волны для различных безразмерных расстояний ξ. Краевое воздействие $\Phi(t)=t\exp(1-t)$.

Приведенные формулы, описывающие искажение прямой волны при распространении ее в наследственной среде, могут быть использованы для определения наследственных параметров среды также, как это было сделано в [3, 4] для отраженной волны. Это, например, можно сделать по измерениям величины максимальной амплитуды и ее положению при распространении колоколообразного импульса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nigul, U.* 1983. Preprint Acad. Sci. of the Estonian SSR. Tallinn.
2. *Нигул У. К., Стулов А. С.* 1985. Препринт РИСО АН ЭССР. Таллинн.
3. *Стулов А. С.* 1986. Изв. ЭССР. Физ. Мат., **35**, № 3, 271—278.
4. *Стулов А.* 1985. Изв. ЭССР. Физ. Мат., **34**, № 2, 178—181.
5. *Ицкович М. А., Нигул У. К.* 1984. Изв. АН СССР. МТТ, вып. 1, 72—77.
6. *Деч Г.* 1971. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и *z*-преобразования. Москва.
7. *Равасоо А. А., Энгельбрехт Ю. К.* 1981. Переходные процессы деформации в вязкоупругой среде при импульсных воздействиях. Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький, 3—10.
8. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* 1963. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва.

Поступила в редакцию
4/XII 1990

Anatoli STULOV

PIKIDEFORMATSIOONILAINETE LEVI LINEAARSETES KIHILISTES PÄRILIKES KESKKONDADES

Lähtudes lineaarsetest esimest järku integro-diferentsiaalvõrranditest, mis kirjeldavad vastassuundades levivaid laineid, ja kasutades Laplace'i integraalteisendust, on tuletatud formaalne lahend, mis kirjeldab läbivat ja tagasipeegeldunud lainet kahe- ja kolmekihilises pärilikus keskkonnas.

Anatoli STULOV

PROPAGATION OF LONGITUDINAL DEFORMATION WAVES IN LAYERED LINEAR HEREDITARY MEDIA

Using the Laplace integral transform, the formal solutions of the first-order integro-differential equation that describes the waves moving in the opposite directions in a linear hereditary layered medium, are obtained.