Изв. АН Эстонии. Физ. Матем., 1991, 40, № 2, 112—114
https://doi.org/10.3176/phys.math.1991.2.07

УДК 532.511—2 : 517.518.11

Рейн РЫЫМ *

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУМЕРНОГО ПОЛЯ ЗАВИХРЕННОСТИ И ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ

(Представил А.-Э. Сапар)

В настоящей работе покажем, что существование бесконечной системы интегралов движения двумерного поля завихренности следует из консервативности функции распределения этого поля.

Рассмотрим двумерное течение жидкости на криволинейной поверхности $\mathcal{S}$ с границей Г, описываемое уравнениями

$$h(\mathbf{x})\left[\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\nabla\right]q(\mathbf{x},t)=-a(\mathbf{x},t), \tag{1}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}h)=0. \tag{2}$$

Здесь t — время, $\mathbf{x}=(x_1, x_2)\in\mathcal{S}$ — криволинейные координаты точки на $\mathcal{S}$, $\mathbf{u}$ — касательное к $\mathcal{S}$ поле скорости, q — потенциальная завихренность (или вихрь Эртеля [1], в дальнейшем — вихрь):

$$q(\mathbf{x},t)=[\mathbf{e}_v(\mathbf{x})\operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{x},t)+f(\mathbf{x})]/h(\mathbf{x}), \tag{3}$$

где $\mathbf{e}_v(\mathbf{x})$ — ортогональный к поверхности $\mathcal{S}$ единичный вектор. Функции $h(\mathbf{x})>0$, $f(\mathbf{x})$ и поле источников вихря $a(\mathbf{x},t)$ предполагаются известными.

Уравнения (1)—(3) описывают эволюцию усредненных по высоте полей скорости и вихря в мелком пруду с неровным дном ($h(\mathbf{x})$ — глубина пруда) в поле силы Кориолиса ($f(\mathbf{x})$ — параметр Кориолиса). Пруд расположен на плоской равнине, если $\mathcal{S}$ — плоскость, и на поверхности сферической планеты, если $\mathcal{S}$ — поверхность сферы. Уравнения (1)—(3) входят, например, в качестве подсистем в общую систему уравнений, описывающих в приближении твердой крышки [2–3] динамику океана и в приближении твердого дна [4] динамику атмосферы. В частном случае $h=\text{const}$, $f=0$ уравнения (1)—(3) переходят в обыкновенные уравнения Навье—Стокса (без трения) для двумерных течений в плоских или криволинейных каналах.

Уравнение (1) обладает при $a=0$ двумя бесконечными множествами интегралов движения (сохраняющихся во времени величин):

$$I_\nu[t,S(t)]\overset{\text{def}}{=}\int\limits_{S(t)}h(\mathbf{x})q^\nu(\mathbf{x},t)\,ds; \tag{4}$$

$$J_\nu(t)\overset{\text{def}}{=}\int\limits_{\mathcal{S}}h(\mathbf{x})q^\nu(\mathbf{x},t)\,ds. \tag{5}$$

Здесь ν — произвольное неотрицательное число (если $q>0$ везде в $\mathcal{S}$, то допускается $\nu<0$); $S(t)$ — произвольная движущаяся вместе с жидкостью область в $\mathcal{S}$. В случае интегралов (5) суммирование происходит во всей (недвижущейся) области $\mathcal{S}$ и для сохранения J_ν необходимо (дополнительно к условию $a=0$) отсутствие потока вихря через граничный контур Г.

* Eesti Teaduste Akadeemia Astrofüüsika ja Atmosfäärifüüsika Instituut (Институт астрофизики и физики атмосферы Академии наук Эстонии). 202444 Tartumaa, Tõravere. Estonia.

Определим меру Лебега [5] измеримого множества $A \subset \mathcal{S}$ следующим образом:

$$\mu(A) \stackrel{\text{def}}{=} \int_A h(\mathbf{x})\, ds,$$

где справа двумерный интеграл (Лебега) на поверхности $\mathcal{S}$. Обозначим через $\gamma(q_0, t)$ линию уровня вихря

$$\mathbf{x} \in \gamma(q_0, t) \;:\; q(\mathbf{x}, t) = q_0 = \text{const.},$$

и через $A(q_0, t)$ — область в $\mathcal{S}$, все точки которой расположены по одну сторону от $\gamma(q_0, t)$:

$$\mathbf{x} \in A(q_0, t) \;:\; q(\mathbf{x}, t) < q_0.$$

Введем функцию распределения [6] вихря в области $S \subset \mathcal{S}$

$$F(q; t, S) \stackrel{\text{def}}{=} \mu[A(q, t) \cap S]. \tag{6}$$

Эта функция является монотонной по q и порождает в одномерном пространстве вихря меру Лебега—Стилтьеса [5, 6]

$$m(q, \Delta q; t, S) \stackrel{\text{def}}{=} F(q + \Delta q; t, S) - F(q; t, S), \quad \Delta q \geqslant 0, \tag{7}$$

которую назовем мерой вихря в S.

Используя меру вихря, интегралы (4) и (5) можно представить в виде

$$I_\nu[t, S(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} q^\nu m[q, dq; t, S(t)]; \tag{8}$$

$$J_\nu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} q^\nu m[q, dq; t, \mathcal{S}], \tag{9}$$

где суммирование происходит по дифференциальным интервалам на вещественной прямой $-\infty < q < \infty$ (часто для дифференциальной меры $m(q, dq)$ используется специальное обозначение $dF(q)$). Из полученного представления (8), (9) видно, что для сохранения интегралов I_ν и J_ν при произвольном ν необходимо, чтобы сохранились соответствующие дифференциальные меры $m[q, dq; t, S(t)]$ и $m[q, dq; t, \mathcal{S}]$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m[q, dq; t, S(t)] = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m[q, dq; t, \mathcal{S}] = 0. \tag{11}$$

Таким образом, при отсутствии источников a сохраняется дифференциальная мера $m[q, dq; t, S(t)]$. Если, кроме того, отсутствует поток вихря через контур Γ, то сохраняется также дифференциальная мера всей области $m[q, dq; t, \mathcal{S}]$.

Из (10), (11) следуют сохранения соответствующих функций распределения

$$\frac{\mathrm{d}F(q; t, S(t))}{\mathrm{d}t} = 0; \quad \frac{\mathrm{d}F(q; t, \mathcal{S})}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{12}$$

Если распределение вихря F является дифференцируемой функцией q, то существует плотность распределения вихря

$$\varphi(q; t, S) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial F(q; t, S)}{\partial q}$$

и выполняются равенства

$$\varphi(q; t, S) = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{m(q; \Delta q; t, S)}{\Delta q} = \int\limits_{\gamma(q,t) \cap S} \frac{h}{|\operatorname{grad} q|} \mathrm{d}l.$$

В этом случае интегралы Лебега—Стилтьеса (8), (9) переходят в обыкновенные интегралы Римана, и сохранение (10), (11) можно записать в виде условий консервативности для плотности распределения

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varphi[q; t, S(t)] = 0; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varphi(q; t, S) = 0. \tag{13}$$

Таким образом, нами показано, что существование бесконечного множества интегралов движения (4), (5) при двумерном квазисоленоидальном движении является следствием существования одной фундаментальной консервативной величины — функции распределения вихря. Описанную консервативность меры вихря можно использовать при составлении схем численного интегрирования систем (1)—(3), обладающих сколь угодно большим (конечным) числом интегралов движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ertel, H.* 1942. Meteorol. Zeitschr., **59**, 271—281.
2. *Bryan, K.*, J. 1969. Comput. Phys., **4**, 347—376.
3. *Залесный В. Б.* 1984. Моделирование крупномасштабных движений в мировом океане. Москва.
4. *Rõõm, R.* 1988. Preprint A-5 Acad. Sci. ESSR. Tallinn.
5. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* 1972. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва.
6. *Макаров Б. М., Флоринская Л. В.* 1974. Теория меры и интеграла, вып. 1. Ленинград.

Поступила в редакцию
13/XII 1990

Rein RÕÕM

KAHEMÕÕTMELISE PÖÖRISVÄLJA JAOTUSFUNKTSIOON JA LIIKUMISINTEGRAALID

On vaadeldud kahemõõtmelise köörisvälja võrrandit (1), mis kirjeldab üle kõrguse keskmistatud kiirusvälja evolutsiooni ideaalses kokkusurumatus vedelikus ebaühtlase aluspinna kohal Coriolise jõu olemasolul. Allikavabal juhul on sellel võrrandil lõpmatu hulk liikumisintegraale. On sisse toodud pöörise jaotusfunktsioon ja näidatud, et isoleeritud süsteemis on see konservatiivne suurus. Integraalide eksisteerimine on järeldus jaotusfunktsiooni konservatiivsusest. Saadud tulemust on võimalik kasutada pöörise võrrandi numbrilise integreerimise skeemide loomiseks, millel on kui tahes suur arv liikumisintegraale.

Rein RÕÕM

DISTRIBUTION OF THE TWO-DIMENSIONAL VORTICITY FIELD AND INTEGRALS OF MOTION

The equation of two-dimensional vorticity (1) describing the evolution of the velocity field averaged upon the depth in an ideal liquid above the nonuniform ground in the presence of the Coriolis force, is studied. In a source-free case this equation has an infinite number of integrals of motion (4), (5). The distribution function of vorticity (6) is introduced, and it is proved to be conservative in an isolated system. The existence of integrals of motion results from the conservation of the distribution (12). The obtained result can be used for the creation of numerical integration schemes for Eq. (1) which has an optional number of integrals of motion.