Изв. АН Эстонии. Физ. Матем., 1990, 39, № 2, 156—159
https://doi.org/10.3176/phys.math.1990.2.10

УДК 517.983.22

Арне КОКК

О ТЕОРЕМАХ ТИПА БАНАХА—СТОУНА

Arne KOKK. BANACHI—STONE'I TÜÜPI TEOREEMIDEST

Arne KOKK. ON BANACH-STONE TYPE THEOREMS

(Представил Г. Вайникко)

Известная теорема Банаха—Стоуна о представлении линейных изометрий пространств непрерывных функций на компакте обобщена многими авторами в нескольких направлениях (см., напр., [1–7], [8] часть II и имеющуюся там библиографию). В настоящей работе дается аналогичное представление для «хороших операторов» [9]. Показана также связь с некоторыми результатами из [8].

Пусть $\mathbf{K}$ — поле $\mathbf{C}$ или $\mathbf{R}$, A и B — нормированные пространства над $\mathbf{K}$ и $L(A,B)$ — совокупность всех непрерывных линейных операторов из A в B, наделенная топологией поточечной сходимости. Кроме того, пусть $A^*=L(A,\mathbf{K})$, $S(A^*)=\{\Lambda\in A^*:\|\Lambda\|\leqslant 1\}$, $\mathcal{E}(A^*)$ — совокупность крайних точек множества $S(A^*)$, T^* — сопряженный оператор оператора $T\in L(A,B)$ и $N(A,B)=\{T\in L(A,B):T^*(\mathcal{E}(B^*))\subset\mathcal{E}(A^*)\}$ — множество хороших операторов из A в B (см. [9, 10]). Далее, пусть $m(X,A)$ — совокупность всех ограниченных A-значных функций на множестве X, наделенная равномерной топологией, $m(X)=m(X,\mathbf{K})$ и $(\alpha\bar{a})(x)=\alpha(x)a$ для всех $a\in A$, $\alpha\in m(X)$ и $x\in X$. Если $Z\subset m(X)$ — некоторое подмножество, то через AZ будем обозначать замкнутое подпространство пространства $m(X,A)$, порожденное множеством $\{\alpha\bar{a}:\alpha\in Z,\ a\in A\}$, а для каждой пары $(x,\varphi)\in X\times A^*$, через $[x,\varphi]$ — линейный функционал на $m(X,A)$ такой, что $[x,\varphi](f)=\varphi(f(x))$ для всех $f\in m(X,A)$.

Т е о р е м а 1. *Пусть A и B — нормированные пространства над $\mathbf{K}$; X, Y и Y_0 — непустые множества такие, что $Y\subset Y_0$ и* card $X\leqslant 2$ *и пусть $Z\subset m(X)$. Кроме того, пусть $T\in L(AZ,m(Y_0,B))$ и отображения $\Delta_1:I\times\mathcal{E}(B^*)\to X$, $\Delta_2:I\times\mathcal{E}(B^*)\to\mathcal{E}(A^*)$ суть такие, что*

$$T^*([y,\varphi])(f)=[\Delta_1(y,\varphi),\ \Delta_2(y,\varphi)](f) \tag{1}$$

для всех $(y,\varphi)\in J\times\mathcal{E}(B^*)$ и $f\in AZ$. Если для всех различных точек x_1, $x_2\in X$ существует функция $\alpha\in Z$ такая, что $\alpha(x_1)=0$ и $\alpha(x_2)=1$, то равносильны следующие утверждения:

1.1) $\Delta_1(y,\varphi_1)=\Delta_1(y,\varphi_2)$ *для всех* $y\in Y$ и $\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{E}(B^*)$;

1.2) *существует отображение $\omega:Y\to N(A,B)$ такое, что*

$$(Tf)(y)=\omega(y)(f(\Delta_1(y,\varphi))) \tag{2}$$

для всех $f\in AZ$ и $(y,\varphi)\in Y\times\mathcal{E}(B^*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1.1)$\Rightarrow$1.2). Пусть $y\in Y$ и $a\in A$. Покажем, что существует элемент $\omega(y)(a)\in B$ такой, что

$$\varphi(\omega(y)(a))=\Delta_2(y,\varphi)(a)\qquad(\forall\varphi\in\mathcal{E}(B^*)). \tag{3}$$

Для этого пусть $\varphi_0 \in \mathscr{E}(B^*)$ — некоторый функционал и $\alpha_0 \in Z$ — такая функция, что $\alpha_0(\Delta_1(y, \varphi_0)) = 1$. Положив $\omega(y)(a) = T(\alpha_0 \bar{a})(y)$, заметим, что

$$\varphi(\omega(y)(a)) = \Delta_2(y, \varphi)((\alpha_0 \bar{a})(\Delta_1(y, \varphi))) = \\ = \Delta_2(y, \varphi)(a)(\alpha_0(\Delta_1(y, \varphi_0))) = \Delta_2(y, \varphi)(a)$$

для всех $\varphi \in \mathscr{E}(B^*)$. В силу равенства

$$\|b\| = \sup_{\varphi \in \mathscr{E}(B^*)} |\varphi(b)| \quad (b \in B) \tag{4}$$

(см., напр., [11], с. 59) ясно, что элемент $\omega(y)(a)$, удовлетворяющий условию (3), определен однозначно.

Далее, как легко проверить, отображение $a \to \omega(y)(a)$ принадлежит $N(A, B)$. В самом деле, если $c_1, c_2 \in \mathrm{K}$ и $a_1, a_2 \in A$, то

$$\varphi(\omega(y)(c_1 a_1 + c_2 a_2)) = \Delta_2(y, \varphi)(c_1 a_1 + c_2 a_2) = \\ = \varphi(c_1 \omega(y)(a_1) + c_2 \omega(y)(a_2))$$

для всех $\varphi \in \mathscr{E}(B^*)$. Значит, отображение $\omega(y)$ линейно на A. Кроме того, в силу равенств (3) и (4), имеем

$$\|\omega(y)(a)\| = \sup_{\varphi \in \mathscr{E}(B^*)} |\Delta_2(y, \varphi)(a)| \leqslant \|a\|$$

и $\omega(y)^*(\varphi) = \Delta_2(y, \varphi) \in \mathscr{E}(A^*)$ для всех $a \in A$ и $\varphi \in \mathscr{E}(B^*)$. Итак, на Y существует $N(A, B)$-значное отображение $y \to \omega(y)$ такое, что для всех $a \in A$ и $y \in Y$ справедливо равенство (3). Теперь

$$\varphi((Tf)(y)) = [\Delta_1(y, \varphi), \Delta_2(y, \varphi)](f) = \\ = \Delta_2(y, \varphi)(f(\Delta_1(y, \varphi))) = \varphi(\omega(y)(f(\Delta_1(y, \varphi))))$$

для всех $\varphi \in \mathscr{E}(B^*)$, $y \in Y$ и $f \in AZ$. Отсюда, ввиду утверждения 1.1), для всех $f \in AZ$ и $(y, \varphi) \in Y \times \mathscr{E}(B^*)$ следует равенство (2).

1.2) $\Rightarrow$ 1.1). Допустим, что $\Delta_1(y_0, \varphi_1) \neq \Delta_1(y_0, \varphi_2)$ для некоторых $y_0 \in Y$ и $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{E}(B^*)$. Тогда $\alpha_1(\Delta_1(y_0, \varphi_1)) = 0$ и $\alpha_1(\Delta_1(y_0, \varphi_2)) = 1$ для некоторой функции $\alpha_1 \in Z$. Кроме того, $\gamma = \Delta_2(y_0, \varphi_2)(a_0) \neq 0$ для некоторого элемента $a_0 \in A$, так как $\Delta_2(y_0, \varphi_2) \in \mathscr{E}(A^*)$. Следовательно,

$$\gamma = \Delta_2(y_0, \varphi_2)(a_0)\alpha_1(\Delta_1(y_0, \varphi_2)) = \\ = \varphi_2(T(\alpha_1 \bar{a}_0)(y_0)) = \varphi_2(\omega(y_0)((\alpha_1 \bar{a}_0)(\Delta_1(y_0, \varphi_1)))) = \\ = \varphi_2(\omega(y_0)(a_0)\alpha_1(\Delta_1(y_0, \varphi_1))) = 0,$$

что невозможно. Таким образом, справедливо утверждение 1.1). Теорема доказана.

Замечание 1. Как легко проверить, в случае, когда Y_0 является топологическим пространством и для каждых $y \in Y$ и $a \in A$ существуют окрестность $O(y) \subset Y_0$ точки y и функция $f \in AZ$ такие, что функция Tf непрерывна на Y_0 и $f(\Delta_1(y', \varphi)) = a$ для всех $(y', \varphi) \in O(y) \times \mathscr{E}(B^*)$, то отображение ω непрерывно на Y.

Пусть теперь X — локально компактное отделимое пространство и A — нормированное пространство над K. Через $C_0(X, A)$ обозначим пространство всех A-значных исчезающих на бесконечности непрерывных функций на X.

Теорема 2. *Пусть X и Y — отделимые локально компактные пространства, A и B — нормированные пространства над* K *и* $T \in N(C_0(X, A), C_0(Y, B))$. *Тогда*

2.1) *существуют непрерывные отображения* $\Delta_1 : Y \times \mathscr{E}(B^*) \to X$ *и* $\Delta_2 : Y \times \mathscr{E}(B^*) \to \mathscr{E}(A^*)$ *такие, что для всех* $f \in C_0(X, A)$ *и* $(y, \varphi) \in Y \times \mathscr{E}(B^*)$ *справедливо равенство* (1);

2.2) *утверждение* 1.1) *справедливо тогда и только тогда, когда найдутся непрерывные отображения* $\varrho : Y \to X$ *и* $\omega : Y \to N(A, B)$ *такие, что*

$$(Tf)(y)=\omega(y)(f(\varrho(y))) \qquad (f\in C_0(X,A),\ y\in Y). \tag{5}$$

Доказательство. Пусть μ_1 и μ_2 — гомеоморфизмы $X\times\mathscr{E}(A^*)$ на $\mathscr{E}(C_0(X,A)^*)$ и $Y\times\mathscr{E}(B^*)$ на $\mathscr{E}(C_0(Y,B)^*)$ соответственно такие, что $\mu_1(x,\psi)=[x,\psi]$ и $\mu_2(y,\varphi)=[y,\varphi]$ для всех $(x,\psi)\in X\times\mathscr{E}(A^*)$ и $(y,\varphi)\in Y\times\mathscr{E}(B^*)$ (см. [12], [13], с. 258). Положим $Z=C_0(X,\mathbf{K})$, $\Delta=\mu_1^{-1}\circ T^*\circ\mu_2$, $\Delta_1=\pi_X\circ\Delta$ и $\Delta_2=\pi_{\mathscr{E}(A^*)}\circ\Delta$, где π_X и $\pi_{\mathscr{E}(A^*)}$ — проекции пространства $X\times\mathscr{E}(A^*)$ на X и на $\mathscr{E}(A^*)$ соответственно. Тогда $AZ=C_0(X,A)$ (см. [14]), отображения Δ_1 и Δ_2 непрерывны на $Y\times\mathscr{E}(B^*)$ и для всех $(y,\varphi)\in Y\times\mathscr{E}(B^*)$ и $f\in C_0(X,A)$ справедливо равенство (1).

Положив теперь $\varrho(y)=\Delta_1(y,\varphi_0)$ для всех $y\in Y$ и некоторого $\varphi_0\in\mathscr{E}(B^*)$, заметим, что справедливо 2.2) (см. теорему 1 и замечание 1). Теорема доказана.

В заключение покажем, как из теоремы 2 вытекают теоремы 8.10 и 8.11 из работы [8].

Пусть $\hat{B}=\{\hat{b}:b\in B\}\subset m(\mathscr{E}(B^*))$, где $\hat{b}(\varphi)=\varphi(b)$ для всех $b\in B$ и $\varphi\in\mathscr{E}(B^*)$. Централизатором $Z(B)$ пространства B называется подалгебра

$$Z(B)=\{f\in m(\mathscr{E}(B^*)):f\cdot\hat{B}\subset\hat{B},\ \bar{\bar{f}}\cdot\hat{B}\subset\hat{B}\}$$

(см. [15], [8], с. 62) (здесь $\bar{\bar{f}}(\varphi)=\overline{f(\varphi)}$ для всех $\varphi\in\mathscr{E}(B^*)$).

Оказывается, что в случае сюръективности оператора $T\in N(C_0(X,A),\ C_0(Y,B))$, из одномерности $Z(B)$ вытекает 1.1). В самом деле, пусть $y\in Y$, $b\in B$ и $\alpha\in C_0(X,\mathbf{K})$ — любые элементы и пусть $\delta_y(\varphi)=\Delta_1(y,\varphi)$ для каждого $\varphi\in\mathscr{E}(B^*)$. Кроме того, пусть $\beta\in C_0(Y,\mathbf{K})$ и $f\in C_0(X,A)$ — такие, что $\beta(y)=1$ и $Tf=\beta\bar{b}$. Положим $c=T(\alpha f)(y)$, где $(\alpha f)(x)=\alpha(x)f(x)$ для всех $x\in X$. Тогда

$$\hat{c}(\varphi)=\varphi(T(\alpha f)(y))=\Delta_2(y,\varphi)((\alpha f)(\delta_y(\varphi)))=((\alpha\circ\delta_y)\hat{b})(\varphi)$$

для всех $\varphi\in\mathscr{E}(B^*)$. Следовательно, $(\alpha\circ\delta_y)\hat{b}=\hat{c}\in\hat{B}$. Поэтому $\alpha\circ\delta_y\in Z(B)$ и, ввиду одномерности $Z(B)$, функция $\alpha\circ\delta_y$ постоянна на $\mathscr{E}(B^*)$. Отсюда, в силу произвольности элементов $\alpha\in C_0(X,\mathbf{K})$ и $y\in Y$, и следует утверждение 1.1).

Итак, если T — линейная изометрия $C_0(X,A)$ на $C_0(Y,B)$ и централизаторы $Z(A)$ и $Z(B)$ пространств A и B одномерны, то (согласно теореме 2) существуют непрерывные отображения $\varrho:Y\to X$, $\omega:Y\to N(A,B)$ и $\delta:X\to Y$, $\nu:X\to N(B,A)$ такие, что

а) справедливо равенство (5),

б) $(T^{-1}g(x))=\nu(x)(g(\delta(x)))\ (g\in C_0(Y,B),\ x\in X)$.

Отсюда $\varrho^{-1}=\delta$ и $(\omega(y))^{-1}=\nu(\varrho(y))$ для всех $y\in Y$. Поэтому, в этом случае, ϱ — гомеоморфизм Y на X, а для всех $y\in Y$, отображение $\omega(y)$ — изометрия A на B.

ЛИТЕРАТУРА

1. *deLeeuw, K., Rudin, W.* // Proc. Amer. Math. Soc., 1960, **11**, 694—698.
2. *Cambern, M.* // Stud. math., 1978, **63**, 213—217.
3. *Behrends, E.* // Math. scand., 1983, **52**, 117—144.
4. *Устинов Г. М., Шашкин Ю. А.* Исследования по функциональному анализу и его приложениям. Свердловск, 1985, 103—109.
5. *Cambern, M., Greim, P.* // Acta Univ. Carolinae. Math. Phys., 1987, **28**, 31—40.
6. *Ellis, A. J., So, W. S.* // Math. Z., 1987, **195**, 119—125.
7. *Jarosz, K., Pathak, V. D.* // Trans. Amer. Math. Soc., 1988, **305**, 193—206.
8. *Behrends, E.* // Lect. Notes in Math., 1979, **736**.
9. *Morris, P. D., Phelps, R. R.* // Trans. Amer. Math. Soc., 1970, **150**, 183—200.
10. *Werner, D.* // Rend. Circ. mat. Palermo, 1984, **33**, 135—143.
11. *Singer, I.* Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces. New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1970.
12. *Cunningham, F., Roy, N. M.* // Proc. Amer. Math. Soc., 1974, **42**, 461—465.
13. *Brosowski, B., Deutsch, F.* // J. Approx. Theory, 1974, **10**, 245—267.
14. *Абель М.* // Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1977, вып. 430, 6—13.
15. *Alfsen, E. M., Effros, E. G.* // Ann. Math., 1972, **96**, 129—173.

Тартуский университет

Поступила в редакцию
20/X 1989