Изв. АН Эстонии. Физ. Матем., 1990, 39, № 2, 108—112
https://doi.org/10.3176/phys.math.1990.2.03

УДК 519.56

Тармо УУСТАЛУ, Пээтер ЛОРЕНТС

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ НАСЛЕДСТВЕННО ПЕРЕЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВ

(Представил Э. Тыугу)

В настоящей работе используется понятие наследственно перечислимого множества из [1] и приводятся несколько подклассов класса наследственно перечислимых множеств. Доказаны теоремы об эффективных переходах от естественных нумераций этих классов к нумерации класса наследственно перечислимых множеств, и наоборот.

Определение 1. *(Код наследственно счетного множества)* [1] $\mathrm{code}\,\varnothing=\lambda x\cdot x+1$. *Если* $H=\{H_i\}_{i\in\mathbf{N}}=\{H_0,\ H_1,\ \ldots\}$ *и* $\forall i\,\mathrm{code}\,H_i=\mathfrak{f}_i$, *то* $\mathrm{code}\,H=\lambda x\cdot\mathfrak{f}_{l(x)}(r(x))$, *где* l *и* r *— функции, обратные канторовской нумерации пар.*

Символ H_i и в дальнейшем будет означать i-й элемент в счетном списке элементов множества H.

Определение 2. *Множество называется наследственно перечислимым, если хотя бы один его код является вычислимой функцией.*

Следствие. *Элементы наследственно перечислимого множества наследственно перечислимы.*

Гёделев номер кода наследственно перечислимого множества H обозначаем через $\mathrm{gc}\,H$, гёделев номер вычислимой функции $\mathfrak{f}$ обозначаем через $\mathrm{gn}\,\mathfrak{f}$.

Теорема 1. *Определение кода наследственно счетного множества корректно в том смысле, что никакая функция не может быть кодом двух различных множеств.*

Доказательство. Допустим противное. Применяя индукцию по определению кода приходим к выводу, что существование двух различных множеств с одинаковыми кодами сводится к существованию непустого множества, код которого равен коду пустого множества $\lambda x\cdot x+1$. Но такого быть не может, ибо индукцией по строению непустого множества доказывается, что произвольный его код c удовлетворяет условию: $\forall x\ (c(x)<x+1\vee\neg\,!\,c(x))$.

Замечание. Класс всех наследственно перечислимых множеств сам наследственно перечислимым не является (иначе он был бы элементом самого себя). Следовательно, множество $\{\mathrm{gc}\,H\,|\,H$ наследственно перечислимо$\}$ не р. п. Тем самым доказано, что гёделевской нумерации для класса всех наследственно перечислимых множеств вовсе не существует.

Теорема 2. *Возможен эффективный переход от гёделева номера кода множества к гёделевым номерам кодов элементов. Точнее, найдется вычислимая функция* $\varkappa$ *такая, что для любого наследственно перечислимого множества* H $\mathrm{gc}\,H=y$ *и любого* i $\varkappa(i,y)=\mathrm{gc}\,H_i$.

Доказательство. Из определения 1 $\mathrm{code}\,H_i=\lambda x\cdot(\mathrm{code}\,H)\times\times(c(i,x))=\lambda x\cdot\varphi_y(c(i,x))$. В силу теоремы о суперпозиции и в силу s-m-n-теоремы, существует требуемая вычислимая функция $\varkappa$ такая, что $\forall i\,\forall y\,\lambda x\cdot\varphi_y(c(i,x))=\lambda x\cdot\varphi_{\varkappa(i,y)}(x)$. Отсюда $\forall i\,\forall y\,\mathrm{gc}\,H_i=\mathrm{gn}\,\lambda x\times\times\varphi_y(c(i,x))=\varkappa(i,y)$.

Теорема 3. *Существует эффективный переход от эффективного пересчета гёделевых номеров кодов элементов к гёделеву номеру кода множества, состоящего из этих элементов. Точнее, найдется такая вычислимая функция s, что для любого y такого, что* $\forall i\ \varphi_y(i) = \mathrm{gc}\, H$, *имеет место* $s(y) = \mathrm{gc}\, H$.

Доказательство. По определению 1

$$\mathrm{code}\, H = \lambda x \cdot (\mathrm{code}\, H_{l(x)})\,(r(x)) = \lambda x \cdot \varphi_{\varphi_y(l(x))}\,(r(x)) = \lambda x \cdot \varphi_{U^1(y, l(x))}\,(r(x)) = \lambda x \cdot U^1(U^1(y, l(x)), r(x)).$$

Пусть s — существующая в силу теоремы о суперпозиции и s-m-n-теоремы, вычислимая функция такая, что $\forall y\, \lambda x \cdot U^1(U^1(y, l(x)), r(x)) = \lambda x \cdot \varphi_{s(y)}(x)$. Тогда $\forall y\ \mathrm{gc}\, H = \mathrm{gn}\, \lambda x \cdot U^1(U^1(y, l(x)), r(x)) = s(y)$.

Замечание. Теоремы 2 и 3 позволяют определить класс наследственно перечислимых множеств и другим путем. Пусть $H = \{H_i\}_{i \in \mathbf{N}}$. Полагаем, что $\mathrm{ind}\, \varnothing = \mathrm{gn}\, \lambda x \cdot \uparrow$ (гёделеву номеру нигде не определенной функции). Теперь, если при некотором k $\forall i\ \varphi_k(i) = \mathrm{ind}\, H_i$, то определяем $\mathrm{ind}\, H = k$. Все множества, получающие индексы, объявляем наследственно перечислимыми.

Эквивалентность двух определений доказывается индукцией по строению множеств.

Теорема 4. *Существует вычислимая функция u такая, что* $\forall n \in \mathbf{N}\ u(n) = \mathrm{gc}\, n$.

Доказательство. $n+1 = n \cup \{n\}$. Определяем функцию f следующим образом:

$$\begin{cases} f(j, 0) = j, \\ f(j, x+1) = \varkappa(x, j) \quad \text{для всех } x \text{ (см. теор. 2).} \end{cases}$$

Тогда $f(\mathrm{gc}\, n, 0) = \mathrm{gc}\, n$ и $f(\mathrm{gc}\, n, x+1) = \varkappa(x, \mathrm{gc}\, n) = \mathrm{gc}\, n_x$. Согласно s-m-n-теореме, существует вычислимая функция g такая, что $\lambda x \cdot f(j, x) = \varphi_{g(j)}$. Очевидно, что $\forall n\, \forall i\ \varphi_{g(\mathrm{gc}\, n)}(i) = \mathrm{gc}\, (n+1)_i$. Отсюда по теореме 3 $\mathrm{gc}(n+1) = s(g(\mathrm{gc}\, n))$. В силу замкнутости класса вычислимых функций относительно оператора рекурсии, следует вычислимость u.

Теорема 5. *Существует вычислимая функция v такая, что для каждого y* $v(y) = \mathrm{gc}\, \mathrm{Val}\, \varphi_y$. *(Функция v тем самым по гёделеву номеру р. п. множества вычисляет гёделев номер кода этого множества.)*

Доказательство. $(\mathrm{Val}\, \varphi_y)_i = \varphi_y(i)$; по теореме 4 $\mathrm{gc}\, \varphi_y(i) = u(\varphi_y(i))$. Согласно теореме 3, $v(y) = \mathrm{gc}\, \mathrm{Val}\, \varphi_y = s(\mathrm{gn}\, \lambda_i \cdot u(\varphi_y)))$. В силу s-m-n-теоремы, теорем о вычислимой универсальной функции и о суперпозиции, такая функция вычислима.

Теорема 6. *Существует вычислимая функция* v' *такая, что для каждого y* $v'(y) = \mathrm{gc}\, \varphi_y$.

Доказательство. $(\varphi_y)_i = \langle i, \varphi_y(i) \rangle = \{\{i\}, \{i, \varphi_y(i)\}\}$. Легко видеть, что функция u', определяемая равенством $u'(y, i) = \mathrm{gc}(\varphi_y)_i$, является вычислимой (доказательство опирается на вычислимость функции u из теоремы 4). Из теоремы 3 вытекает, что $v'(y) = \mathrm{gc}\, \varphi_y = s(\mathrm{gn}\, \lambda i \cdot u'(y, i))$, эта функция, в силу s-m-n-теоремы и теоремы о суперпозиции, вычислима.

В качестве более сложных наследственно перечислимых множеств рассмотрим конструктивные по Чёрчу—Клини ординалы.

Следуя [2], определим системы обозначений для ординалов.

О п р е д е л е н и е 3. *Пусть* $\mathbf{C}_{\mathrm{II}}$ *т. н. второй числовой класс (т. е. совокупность всех счетных ординалов),* ν — *некоторая частичная функция из* $\mathbf{N}$ *в* $\mathbf{C}_{\mathrm{II}}$ *и* k, p, q — *такие вычислимые функции, что*

1) $\nu(x)=0 \Rightarrow k(x)=0$,

2) $\nu(x)$ *есть последовательность* $\Rightarrow$
$\Rightarrow k(x)=1\ \&\ !\,p(x)\ \&\ \nu(x)=\nu(p(x))+1$,

3) $\nu(x)$ *есть предельный ординал* $\Rightarrow$
$\Rightarrow k(x)=2\,\&\,!\,q(x)\ \&\ \varphi_{q(x)}$ *тотальна* &
$\langle \nu(\varphi_{q(x)}(n))\rangle_{n<\omega}$ *есть фундаментальная последовательность для* $\nu(x)$.

В таком случае пятерка $S=\langle \mathrm{Dom}\,\nu, \nu, k, p, q\rangle$ *называется системой обозначений для ординалов. Для указания конкретной системы вместо* $\mathrm{Dom}\,\nu, \nu, k, p, q$ *условимся писать* $\mathbf{D}_S, \nu_S, k_S, p_S, q_S$ *соответственно.*

О п р е д е л е н и е 4. *Ординал* α *называется конструктивным в смысле Чёрча—Клини, если существуют система* S *и число* x *такие, что* $\nu_S(x)=\alpha$.

О п р е д е л е н и е 5. *Система обозначений называется максимальной, если она дает обозначение любому конструктивному ординалу.*

О п р е д е л е н и е 6. *Система обозначений* S *называется унивалентной, если* ν_S — *взаимно однозначная функция.*

О п р е д е л е н и е 6. *Система обозначений* S *обладает свойством генерируемости начальных сегментов, если существует такая вычислимая функция* γ, *что для всех* $x\in\mathbf{D}_S$ *имеет место равенство* $\mathrm{Val}\,\varphi_{\gamma(x)}=\{z\,|\,\nu_S(z)<\nu_S(x)\}$.

В [3] доказано, что существуют системы с генерируемыми начальными сегментами, которые одновременно и максимальны и унивалентны.

Модифицируем лемму о рекурсии из [2] так, что участвующее в ее формулировке удовлетворяющее условию минимальности отношение не обязательно должно быть частичным порядком.

Л е м м а о т р а н с ф и н и т н о й р е к у р с и и. *Пусть* $M\subseteq\mathbf{N}$ *и* $\prec$ — *некоторое нерефлексивное бинарное отношение на* M, *удовлетворяющее условию минимальности. Тогда, если для некоторого бинарного отношения* T *на* $\mathbf{N}$ *существует такая вычислимая функция* η, *что*

$$(\forall w\in M)\,(\forall n\in\mathbf{N})\,[\forall v\,[v\in M\ \&\ v\prec w \Rightarrow !\varphi_n(v)\ \&\ vT\varphi_n(v)] \Rightarrow \\ \Rightarrow !\,\eta(n,w)\ \&\ wT\eta(n,w)],$$

то существует такая вычислимая функция ψ, *что*

$$(\forall w\in M)\ (!\,\psi(w)\ \&\ wT\psi(w)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу s-m-n-теоремы существует такая общерекурсивная функция g, что

$$\varphi_{g(x)}=\lambda y\cdot\eta(x,y).$$

Используя теорему о неподвижной точке, найдем такое число e, что $\varphi_{g(e)}=\varphi_e$, и определим множество

$$B=\{m\,|\,m\in M\ \&\ !\,\varphi_e(m)\ \&\ mT\varphi_e(m)\}.$$

Согласно условиям леммы, имеем

$$(\forall w\in M)\,[\{v\,|\,v\in M\ \&\ v\prec w\}\subseteq B\Rightarrow w\in B]. \qquad (*)$$

Убедимся, что в таком случае $B=M$, т. е.

$$(\forall w\in M)\,(!\,\varphi_e(w)\ \&\ wT\varphi_e(w)).$$

Действительно, предположим, что $M-B\neq\varnothing$. Тогда в силу свойства минимальности отношения $\prec$ должно существовать такое $a\in M-B$, для которого

откуда

$$(\forall b\in M-B)\,(\neg\, b\prec a \vee b=a),$$
$$\{v\,|\,v\in M\ \&\ v\prec a\ \&\ v\neq a\}\subseteq B.$$

Но поскольку $\prec$ нерефлексивно, то

$$\{v\,|\,v\in M\ \&\ v\prec a\}=\{v\,|\,v\in M\ \&\ v\prec a\ \&\ v\neq a\}.$$

Теперь на основе (*) имеем $a\in B$. Это противоречит допущению $a\in M-B$. Следовательно, $B=M$.

Остается полагать $\psi=\varphi_e$.

Теорема 7. *Каждый конструктивный по Чёрчу—Клини ординал является наследственно перечислимым. Если система обозначений S унивалентна, максимальна и имеет генерируемые начальные сегменты, то существует вычислимая функция Ψ такая, что для любого конструктивного по Чёрчу—Клини ординала α*

$$\psi(\nu^{-1}(\alpha))=\mathrm{gc}\,\alpha.$$

Доказательство. Применим лемму о трансфинитной рекурсии. Пусть $M=\mathbf{D}_S$, $v\prec w \leftrightharpoons \nu_S(v)<\nu_S(w)$, $vTx\leftrightharpoons \mathrm{gc}(\nu(v))=x$. Функция $\varphi_n(v)$ по условиям леммы должна быть определенной для обозначений, ординалы обозначаемые которыми меньше $\nu_S(w)$; значениями той функции при $vT\varphi_n(v)$ пусть являются гёделевы номера кодов таких ординалов. Заметим, что условие нерефлексивности и минимальности для $\prec$ выполнено. Определим функцию η.

Очевидно, что список элементов множества $\nu_S(w)$ можно организовать таким образом, что $\mathrm{gc}\,[\nu_S(w)]_i=\varphi_n(\varphi_{\gamma(w)}(i))$ (функция γ генерирует обозначения в начальных сегментах). По *s-m-n*-теореме, теореме о вычислимой универсальной функции и теореме о суперпозиции существует такая вычислимая функция f, что $\lambda i\cdot\varphi_n(\varphi_{\gamma(w)}(i))=\varphi_{f(n,w)}$. В силу теоремы 3, $\mathrm{gc}\,\nu_S(w)=s(f(n,w))$. Легко видеть, что функцию η теперь естественно определить равенством $\eta(n,w)=s(f(n,w))$. Очевидно, что η вычислима.

Та функция ψ, о которой говорится в формулировке леммы о трансфинитной рекурсии и которая при истинности условий леммы вычислима, и есть требуемая вычислимая функция настоящей теоремы.

Следствие. *Поскольку всякий ординал α принадлежит классу $\mathbf{L}_{\alpha+1}$, то предыдущей теоремой показано, что вплоть до $\mathbf{L}_{\omega_1^{ск}}$ на всех уровнях иерархии конструктивных по Гёделю множеств появляются новые наследственно перечислимые множества.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лорентс П. П.* // Успехи матем. наук, 1985, **40**, вып. 3 (243), 211—212.
2. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М., Мир, 1972.
3. *Лорентс П. П.* // Тез. VIII всесоюз. конф. «Логика и методология науки». Вильнюс, 1982, 53.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонии

Поступила в редакцию
22/I 1990

Tarmo UUSTALU, Peeter LORENTS

MÕNEDEST PÄRILIKULT GENEREERITAVATE HULKADE KLASSIDEST

On toodud pärilikult genereeritava hulga ja selle koodi mõiste, näidatud kodeerimise korrektsus ning efektiivse ülemineku võimalus hulga koodilt elementide koodide loetelule ja vastupidi. Mõnede pärilikult genereeritavate hulkade klasside (naturaalarvud, genereeritavad hulgad, arvutatavate funktsioonide graafikud, Churchi-Kleene'i mõttes konstruktiivsed ordinaalid) puhul on uuritud seost nende klasside loomulike numeratsioonide ja koodide vahel.

Tarmo UUSTALU and Peeter LORENTS

ON SOME CLASSES OF HEREDITARILY ENUMERABLE SETS

The concepts of a hereditarily enumerable set and its code defined, the correctness of the coding mechanism and a possibility of effective transition from the code of a set to an enumeration of the codes of its elements and vice versa are proved. For some classes of hereditarily enumerable sets (natural numbers, r. e. sets, graphics of computable functions, constructible by Church and Kleene ordinal numbers) connections between the natural numberings of those classes and coding are studied.