EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1989, 38, 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1989.2.13

УДК 681.5.015

Юлле КОТТА

О ДИСКРЕТИЗАЦИИ ЛИНЕЙНО-АНАЛИТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

ÜLLE KOTTA. PIDEVA AJAGA LINEAAR-ANALÜÜTILISTE SÜSTEEMIDE DISKRETISEERIMISEST

ÜLLE KOTTA. ON THE DISCRETIZATION OF CONTINUOUS-TIME LINEAR-ANALYTIC SYSTEMS

(Представил Ю. Яаксоо)

1. Введение. Статья посвящена продолжению исследований по построению дискретных моделей нелинейных непрерывных систем. В [1] и [2] были предложены дискретные эквиваленты непрерывной системы с одним входом для билинейных и аналитических систем соответственно. В данной работе будет построена дискретная модель для линейно-аналитических систем со многими входами. Класс линейно-аналитических (линейных относительно управления) непрерывных систем заслуживает огромного внимания в теории управления нелинейными системами, так как является важнейшим подклассом их. Это связано с тем, что в силу линейности управления задачи синтеза заметно упрощаются и в то же время этот подкласс является замкнутым, например, относительно применения линейно-аналитической обратной связи, обращения, нелинейного преобразования координат состояния и др.

2. Дискретная модель непрерывной линейно-аналитической системы. Непрерывная линейно-аналитическая система описывается уравнениями

$$\dot{x}=f_0(x)+\sum_{i=1}^{m} f_i(x)\,u_i, \qquad x(t_0)=x_0, \tag{1}$$

где состояние $x\in R^n$, управление $u=(u_1, \ldots, u_m)^{\mathrm{T}}\in R^m$, $f_0, f_1, \ldots, f_m$: $R^n\to R^n$ — аналитические функции.

Разностные уравнения, решения которых совпадают в заданные дискретные моменты времени с решениями соответствующих дифференциальных уравнений в предположении, что вход дифференциальных уравнений ступенчатая функция, называем дискретной моделью непрерывной системы.

Полагаем, что $u(kT+t)=u(kT)$ для $0\leqslant t<T$ (T — шаг дискретизации), и обозначим

$$f(\cdot, u(kT))=f_0(\cdot)+\sum_{i=1}^{m} f_i(\cdot)\,u_i(kT). \tag{2}$$

Функциональное разложение решения системы дифференциальных уравнений (1) в интервале $0 \leqslant t < T$ имеет вид [3]

$$x(kT+t) = \sum_{r \geqslant 0} \frac{t^r}{r!} L^r_{f(\cdot, u(kT))} x \big|_{x(kT)}, \tag{3}$$

где

$$L_{f(\cdot, u(kT))} = \sum_{i=1}^{n} f_i(\cdot, u(kT)) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

есть дифференциальный оператор, соответствующий функции $f(\cdot, u(kT))$: $R^n \to R^n$; $f_i(\cdot, u(kT))$ есть i-я компонента векторной функции $f(\cdot, u(kT))$, $L^r_{f(\cdot, u(kT))}$ есть r-кратная композиция дифференциального оператора $L_{f(\cdot, u(kT))}$, I есть тождественное отображение, а $|_x$ обозначает «при рассматриваемом значении x».

Нас интересуют координаты состояния только в дискретные моменты времени, кратные T. Если $t = kT + T$, то (3) дает

$$x(kT+T) = \left(I + T L_{f(\cdot, u(kT))} + \frac{T^2}{2!} L^2_{f(\cdot, u(kT))} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{T^r}{r!} L^r_{f(\cdot, u(kT))} + \ldots \right) x \big|_{x(kT)}.$$

Учитывая обозначение (2) и то, что

$$L_{f(\cdot, u(kT))} = L_{f_0} + \sum_{i=1}^{m} u_i(kT) L_{f_i},$$

$$(L_{f_0} + u_i(kT) L_{f_i}) u_j(kT) L_{f_j} = u_j(kT) L_{f_0} L_{f_j} + u_i(kT) u_j(kT) L_{f_i} L_{f_j},$$

дискретную модель системы (1) можно представить следующим образом:

$$x(kT+T) = G_0(x(kT)) + \sum_{i_1=1}^{m} G_{i_1}(x(kT)) u_{i_1}(kT) + \ldots$$
$$\ldots + \sum_{i_1, \ldots, i_p = 1}^{m} G_{i_1 \ldots i_p}(x(kT)) u_{i_1}(kT) \ldots u_{i_p}(kT) + \ldots, \tag{4}$$

где

$$G_0(x(kT)) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{T^r}{r!} L^r_{f_0} x \big|_{x(kT)}, \tag{5}$$

$$G_{i_1 \ldots i_p}(x(kT)) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{T^{r+p}}{(r+p)!} \sum_{c_1, c_2, \ldots, c_{p+1}} L^{c_1}_{f_0} L_{f_{i_1}} L^{c_2}_{f_0} L_{f_{i_2}} \ldots L_{f_{i_p}} L^{c_{p+1}}_{f_0} x \big|_{x(kT)},$$

где суммирование ведется по всем целочисленным неотрицательным наборам $c_1, c_2, \ldots, c_{p+1}$, удовлетворяющим уравнению $c_1 + c_2 + \ldots$ $\ldots + c_{p+1} = r$.

Замечание. Другой способ выражения $G_{i_1 \ldots i_p}(x(kT))$ следующий:

$$G_{i_1 \ldots i_p}(x(kT)) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{T^{r+p}}{(r+p)!} \sum_{s_1=0}^{r} \sum_{s_2=0}^{s_1} \ldots$$
$$\ldots \sum_{s_p=0}^{s_{p-1}} L^{s_p}_{f_0} L_{f_{i_1}} L^{s_{p-1}-s_p}_{f_0} L_{f_{i_2}} \ldots L_{f_{i_p}} L^{r-s_1}_{f_0} x \big|_{x(kT)}.$$

3. Частный случай билинейных систем. Получим следствие из результата, сформулированного в предыдущем пункте. Рассмотрим билинейную систему, описываемую уравнениями

$$\dot{x}=Ax+\sum_{i=1}^{m} B_i x u_i,$$

где A, B_1, ..., B_m — постоянные матрицы размеров $n\times n$. В случае билинейных систем функции $f_0(x)=Ax$ и $f_i(x)=B_i x$, $i=1$, ..., m, линейные, вследствие чего

$$L_{f_0} x|_{x(kT)}=Ax(kT),\ L^s_{f_0} x|_{x(kT)}=$$
$$=A^s x(kT),\ L_{f_i} L^s_{f_0} x|_{x(kT)}=A^s B_i x(kT) \text{ и т. д.}$$

Следовательно, из (5) получим

$$G_0(x(kT))=G_0 x(kT),\tag{6}$$
$$G_{i_1\dots i_p}(x(kT))=G_{i_1\dots i_p} x(kT),$$

где

$$G_0=e^{AT},$$

$$G_{i_1\dots i_p}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{T^{r+p}}{(r+p)!}\sum_{c_1,\dots,c_{p+1}} A^{c_1}B_{i_1}A^{c_2}\dots B_{i_p}A^{c_{p+1}}=$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{T^{r+p}}{(r+p)!}\sum_{s_1=0}^{r}\sum_{s_2=0}^{s_1}\dots\sum_{s_p=0}^{s_{p-1}} A^{r-s_1}B_{i_p}A^{s_1-s_2}B_{i_{p-1}}\dots B_{i_2}A^{s_{p-1}-s_p}B_{i_1}A^{s_p}.\tag{7}$$

З а м е ч а н и е. Приведенный в [1] результат получается как следствие из формул (7).

4. Заключение. Дискретная модель принадлежит к более сложному классу систем, чем исходная система, а именно, линейность относительно управления не сохраняется при дискретизации: дискретный эквивалент принадлежит к классу полиномиально-аналитических систем. В то же время линейность относительно состояния при дискретизации билинейных систем сохраняется и порядок дискретной модели равен порядку исходной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Котта Ю.* // Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 1986, **35**, № 3, 326—328.
2. *Monaco, S., Normand-Cyrot, D.* // Lect. Notes Contr. and Inf. Sci., 1986, **83**, 354—367.
3. *Fliess, M., Lamnabhi, M., Lamnabhi-Lagarrigue, F.* // IEEE Trans. on Circuits and Syst., 1983, **30**, № 8, 554—570.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
7/VI 1988