EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1989, 38, 2

УДК 519.3 : 51 : 62—50

И. КЕЙС

СИНТЕЗ СУБОПТИМАЛЬНОГО ПО ОБЪЕМНОМУ КРИТЕРИЮ УПРАВЛЕНИЯ МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ СПОСОБОМ ЛИНЕЙНОЙ АГРЕГАЦИИ

(Представил Ю. Яаксоо)

Рассматривается задача управления многомерной линейной системой с квадратичным функционалом оптимальности. Исследуется вопрос сохранения и преобразования динамических свойств свободной исходной системы в агрегированную при точной декомпозиции в стационарном случае. Анализируется вопрос определения матриц усиления и агрегации приближенного регулятора, субоптимальных по объемному функциональному критерию типа Лиувилля. Получены необходимые условия их экстремальности и предложен синтез линейного по выходу субоптимального управления, дополняющий результаты [1–7]. Предложены необходимые и достаточные условия, при которых переходная матрица является экспонентой интеграла от матрицы линейного уравнения.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу управления многомерной системой

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u;\quad 1 \ll n \equiv \dim x \geqslant r \equiv \dim u, \qquad (1.1)$$
$$\dim u = \varrho_B \equiv \operatorname{rank} B,\quad \dot{f} \equiv \mathrm{df/dt},$$

с квадратичным функционалом оптимальности

$$2I = x_1^{\mathrm{T}} P_1 x_1 + \int_{t_0}^{t_1} [x^{\mathrm{T}} Q(t) x + u^{\mathrm{T}} R(t) u]\,\mathrm{dt} \to \min_u \equiv 2I^0(t_0, x_0) \qquad (1.2)$$

с фиксированными $x_0 \equiv x[t_0]$, $t_0, t_1 \leqslant +\infty$, $f_1 \equiv f[t_1]$, где x, u — векторы состояния и управления, $u \in C[\mathcal{T}]$, $\mathcal{T} \equiv [t_0, t_1]$, A, B, P, Q, R-непрерывные на $\mathcal{T}$ матрицы нужного порядка

$$Q^{\mathrm{T}} = Q \geqslant 0,\quad R^{\mathrm{T}} = R > 0,\quad P_1^{\mathrm{T}} = P_1 \equiv P[t_1] = \mathrm{const} \geqslant 0. \qquad (1.3)$$

При условиях (1.3) задача (1.1), (1.2) имеет x-линейный единственный оптимальный регулятор $u^0(t, x)$ системы (1.1), (1.2)

$$u^0 = K^0(t)x;\quad K^0 = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}M,\quad 2I^0(t_0, x_0) = x_0^{\mathrm{T}} M(t_0) x_0, \qquad (1.4)$$

где $0 < M(t)$ — решение на $\mathcal{T} \setminus t_1$ дифференциально-матричного уравнения

$$\dot{M} = MBR^{-1}B^{\mathrm{T}}M - A^{\mathrm{T}}M - MA - Q;\quad M_1 = P_1 \geqslant 0. \qquad (1.5)$$

При формальной простоте задачи (1.1), (1.2) реализация решения (1.5) ввиду $n \gg 1$ представляет большие требования к объему вычислений и памяти ЭВМ, связана с неустойчивостью решения (1.5) в прямом времени, ростом ошибок округления при $n \gg 1$ [1–4, 7, 8]. Кроме того, возможна ситуация неполной обратной связи, когда измеряется лишь сигнал выхода $z = C(t)x$, $1 \leqslant l < n$, где $(l \times n)$ — матрица C задает агрегацию или декомпозицию, а выполнение условия наблюдаемости $x(t)$ по $z(t)$ невозможно, либо технически затруднительно [2–7, 8].

Поэтому здесь на основе точной декомпозиции стационарных систем [2] и прямой линейной агрегации [6] нестационарных систем (1.1), (1.2) используется более простой, чем в [1, 3, 4, 7] для реализации перечисленных условий, вид приближенных регуляторов, зависящих лишь от t и выхода z

$$\hat{u}=\hat{K}z=\hat{K}Cx=\tilde{K}x;\quad \tilde{K}\equiv\hat{K}C;\quad \hat{K},\ C\in C[\mathcal{T}],\quad l<r, \tag{1.6}$$

где матрицы усиления $\hat{K}$, агрегации C и эффективная матрица $\tilde{K}$ соответственно размеров $(r\times l)$, $(l\times n)$, $(r\times n)$. Известно, что значение (1.2) при $u=\hat{u}$ на процессе (1.1) будет квадрикой $2\hat{I}=$ $=x^{\mathrm{T}}L[t,\cdot]x$, где матрица L удовлетворяет уравнению

$$-\dot{L}=L\tilde{A}+\tilde{A}^{\mathrm{T}}L+\tilde{Q},\quad L_1=P_1;\quad L^{\mathrm{T}}=L=L[t,t_1,L_1[\hat{K},C]], \tag{1.7}$$

$$\tilde{A}\equiv A+B\tilde{K},\quad \tilde{Q}\equiv Q+\tilde{K}^{\mathrm{T}}R\tilde{K},\quad L_1\equiv L[t_1,\cdot],\quad L_0\equiv L[t_0,\cdot],$$

имеющему на $\mathcal{T}/t_1$ единственное решение $L>M$ вида [3, 6, 7]

$$L=\Phi^{\mathrm{T}}(t_1,t)P_1\Phi(t_1,t)+\int_t^{t_1}\Phi^{\mathrm{T}}(\tau,t)\tilde{Q}(\tau)\Phi(\tau,t);\quad L>0,\quad t\in\mathcal{T}\backslash t_1, \tag{1.8}$$

где $\Phi(t,\tau)\equiv\Phi[t,\tau|\tilde{A}]$ обозначает переходную матрицу

$$\dot{\Phi}=\tilde{A}(t)\Phi,\quad \Phi(\tau,\tau)=1_n;\quad \Phi(t,s)\Phi(s,\tau)=\Phi(t,\tau);\quad \dot{\Phi}\equiv d\Phi/\mathrm{dt}. \tag{1.9}$$

Обозначив соответствующие функционалам I^0 (1.4), $\hat{I}$ (1.7) при $t=t_0$ эллипсоиды

$$\mathcal{E}[M_0]=\{x_0|x_0^{\mathrm{T}}M_0x_0\leqslant 1\},\quad \varepsilon[L_0]=\{\hat{x}_0|\hat{x}_0^{\mathrm{T}}L_0x_0\leqslant 1\}, \tag{1.10}$$

зададим их меру близости разностью объемов областей (1.10).

Задача минимизации этой меры определяет субоптимальную пару $\hat{K}^+, C^+$ на $\mathcal{T}$ как минимизирующую функциональный критерий $\det L[t_0|\cdot]$ типа фазового инварианта Лиувилля [5, 6].

Ввиду прикладного значения стационарных систем (1.1), (1.2), $t_1=+\infty$, рассмотрим подробнее элементы алгебры преобразований стационарной агрегации (1.6) в случае точной декомпозиции [2].

2. Динамические свойства стационарной агрегированной системы, заданной точной декомпозицией по агрегату $z=Cx$

Условие точной декомпозиции по z стационарной модели (1.1)

$$\dot{z}=\hat{A}z+\hat{B}u,\quad z(0)=Cx(0);\quad \hat{A}\equiv V=\mathrm{const},\quad \hat{B}\equiv CB=\mathrm{const},\quad \varrho_C=l, \tag{2.1}$$

эквивалентно равносильным матричным уравнениям [2]

$$CA=VC;\ V,\ C\ —\ \text{искомые}\ (l\times l)\text{-},\ (l\times n)\text{-матрицы},\ l\ll n, \tag{2.2}$$

$$CAP_C=0,\ V=CAC^{\mathrm{T}}(CC^{\mathrm{T}})^{-1};\ A,\ B,\ C,\ V,\ P_1,\ Q,\ R=\mathrm{const}, \tag{2.3}$$

где $(n\times n)$-матрица проектирования $P_C\equiv P[C]\equiv I_n-C^{\mathrm{T}}(CC^{\mathrm{T}})^{-1}C$.

Сперва рассмотрим случай распада спектра A на два изолированных набора собственных чисел $\{\lambda_i\}$, $\{\lambda_j\}$, $1\leqslant i\leqslant l$, $l+1\leqslant j\leqslant n$, заданный условиями на λ_k и выбор C вида

$$\lambda_i\neq\lambda_j;\quad \mathrm{Re}\,\lambda_i\geqslant\mathrm{Re}\,\lambda_j;\quad 1\leqslant i\leqslant l,\quad l+1\leqslant j\leqslant n,\quad 1\leqslant k\leqslant n, \tag{2.4}$$

$$\varrho[X^{(1)}]=l;\quad X\equiv CS=[X^{(1)}|X^{(2)}],\quad A=SJ_AS^{-1}, \tag{2.5}$$

где J_A — форма Жордана матрицы A; S — ее приводящая матрица, $X^{(1)}\equiv CS^{(1)}$; $X^{(2)}\equiv CS^{(2)}$; $S\equiv[S^{(1)}|S^{(2)}]$; $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ — соответственно размеров $(n\times l)$, $(n\times m)$; $m\equiv n-l$. В этом достаточно общем и устойчивом в смысле взаимной простоты двух наборов $\{\lambda_i\}$, $\{\lambda_j\}$ случае учтены обычно используемый в управлении выбор l главных собственных чисел A при агрегации и соответствующая ранговая согласованность (2.5) искомой матрицы агрегации C. Ввиду первых неравенств (2.4), матрица J_A — блочно-диагональная, где блоки $J^{(1)}$, $J^{(2)}$ Жордана размеров $(l\times l)$, $(m\times m)$ и

$$J_A=\begin{bmatrix} J^{(1)} & 0_{lm} \\ 0_{ml} & J^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{diag}\circ[J^{(1)}]=\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l), \tag{2.6}$$

$$\mathrm{diag}\circ[J^{(2)}]=\mathrm{diag}\,(\lambda_{l+1}, \ldots, \lambda_n); \quad 1\leqslant i\leqslant l, \quad l+1\leqslant j\leqslant n.$$

Из (2.2), (2.5), (2.6) следует, что матрица V (2.1) имеет структуру $J^{(1)}$, λ_i-собственные числа $J^{(1)}$, ибо $V=X^{(1)}J^{(1)}X^{(1)-1}$, а все множество искомых V, C (2.5) удовлетворяет

$$V=TJ^1T^{-1}; \quad CS^{(2)}=0_{lm}, \quad \varrho[CS^{(1)}]=l, \tag{2.7}$$

где $T\equiv X^{(1)}\equiv CS^{(1)}$, $|T|\neq 0$; $\varrho[F]\equiv\varrho_F\equiv\mathrm{rank}\,F$, $|F|\equiv\det F$.

Введем матрицу $H\equiv P'[S^{(2)\mathrm{T}}]$ Эрмита и обозначения

$$H=I_n-\bar{S}^{(2)}[S^{(2)\mathrm{T}}\bar{S}^{(2)}]^{-1}S^{(2)\mathrm{T}}=U\begin{bmatrix} I_{ll} & 0_{lm} \\ 0_{ml} & 0_{mm} \end{bmatrix}U^*, \quad U^*\equiv\bar{U}^{\mathrm{T}}, \tag{2.8}$$

где матрица $U=[U_1|U_2]$ унитарна — $UU^*=I_n$, причем

$$U_1^*U_1=I_l, \quad U_1^*U_2=0_{lm}, \quad U_2^*U_1=0_{ml}, \quad U_2^*U_2=I_m \quad (F^*\equiv\bar{F}^{\mathrm{T}}).$$

Учитывая (2.8), находим множество решений (2.7) вида

$$C^{\mathrm{T}}=U_1V_1, \quad \varrho[V_1]=l; \quad (l\times l)\text{-матрица } V_1 \text{ произвольна.} \tag{2.9}$$

Используя (2.8), (2.9), получим, что C действительна лишь если $S^{(2)}$ удовлетворяет условию обобщенной ортогональности

$$U_1=\Omega u\omega, \quad \Omega^{\mathrm{T}}\Omega=\omega^{\mathrm{T}}\omega=I_l, \quad u=\mathrm{diag}(u_1, u_2, \ldots, u_l), \tag{2.10}$$

где $(n\times l)$-, $(l\times l)$-матрицы Ω, ω — действительные, подчинены (2.8), (2.10), $|u_i|=1$, $1\leqslant i\leqslant l$, $(l\times l)$-матрица V_1 — действительная, неособенная и произвольная.

Из равенств (2.7)—(2.9) заключаем, что в случае (2.4), (2.5) матрица C зависит явно лишь от l-мерного ортогонального по Эрмиту дополнения U_1 к подпространству $S^{(2)}$, причем агрегированная матрица $\hat{A}\,(A\Rightarrow\hat{A})$ подобна $J^{(1)}$ (2.6) с T-приводящей матрицей, где

$$\hat{A}\equiv V=TJ^{(1)}T^{-1}, \quad T=V_1^{\mathrm{T}}U_1S^{(1)}. \tag{2.11}$$

При данной матрице агрегации C, $\varrho_C=l$, найдем все множество матриц A, заданных уравнением точной декомпозиции (2.3).

Обозначим $\mathfrak{K}(l\times n)$-, $\mathfrak{D}(n\times m)$-матрицы $\mathfrak{K}$. $\mathfrak{D}$-решения системы

$$\mathfrak{K}\mathfrak{D}=0_{lm} \quad \mathfrak{K}\mathfrak{K}^{\mathrm{T}}=I_l, \quad \mathfrak{D}^{\mathrm{T}}\mathfrak{D}=I_m, \quad \mathfrak{K}^{\mathrm{T}}\mathfrak{K}\times\mathfrak{D}\mathfrak{D}^{\mathrm{T}}=I_n;$$

$$\mathfrak{K}\equiv(\mathfrak{C}\mathfrak{C}^{\mathrm{T}})^{-1/2}C, \tag{2.12}$$

в которых (2.2), (2.3) примет вид

$$\mathfrak{K}A\mathfrak{D}=0_{lm}, \quad \hat{A}=V=N\mathfrak{F}\mathrm{N}^{-1}, \quad \mathfrak{F}=\mathfrak{K}A\mathfrak{K}^{\mathrm{T}}, \quad N=(\mathfrak{C}\mathfrak{C}^{\mathrm{T}})^{1/2}. \tag{2.13}$$

Из (2.12), (2.13) находим, что все множество решений А уравнения (2.3) дает представление

$$\mathcal{A}=\mathfrak{R}\left|\frac{\mathfrak{W}_{mn}}{0_{lm}|\tilde{\mathfrak{F}}_{ll}}\right|\mathfrak{R}^{\mathrm{T}}; \quad \mathfrak{R}=[\mathfrak{D}|\mathfrak{K}^{\mathrm{T}}], \quad \mathfrak{R}^{-1}=\mathfrak{R}^{\mathrm{T}}, \tag{2.14}$$

где $\mathfrak{F}\neq\tilde{\mathfrak{F}}_{ll}$, $\mathfrak{W}_{mn}$ — произвольные матрицы размеров $(l\times l)$, $(m\times n)$.

Из (2.12) — (2.14) ясно, что для допустимых пар A, C-решений (2.2) или (2.3) спектр $\bar{A}$ — часть спектра $\lambda(A)$ матрицы A, $\lambda(\bar{A}) \subset \lambda(A)$. При этом спектр $\mathcal{F}$ (2.13) входит в $\lambda(A)$, $\lambda(\mathcal{F}) = \lambda(\bar{A})$, а решение задачи поиска допустимых A, C и инвариантных отношений сохранения части динамики при агрегации и $u \equiv 0$ определяется лишь уравнениями (2.12), (2.13) с «нормированными» по N матрицам $K, \mathcal{F}$. Если назвать $\mathcal{F}$ нормированным агрегатом A, то аналогично [2] из (2.12), (2.13) следует, что любая матричная функция $f(A)$ имеет $f(\mathcal{F})$ своим агрегатом, если f определена на $\lambda(A)$, либо является полиномом от A, ибо если K, $D(K, A)$ удовлетворяют (2.12), то верно $Kf(A) = f(\mathcal{F})K$.

В частности, если $(I_n - A)^{-1}$ существует, то $(I_l - \mathcal{F})^{-1}$ — ее агрегат. Обозначив $\Phi(t, \tau) = \exp|sA]$ переходную матрицу свободной $u \equiv 0$, $s \equiv t - \tau$ исходной модели (1.1), получим из (2.13) и общего равенства ее агрегат — фундаментальную матрицу соответствующей агрегированной модели (2.1) $(u \equiv 0)$ в виде $\hat{\Phi}(t, \tau) = \exp[(t-\tau)N\mathcal{F}N^{-1}]$, который описывает всю ее динамику.

Заметим, что если случай изолированных наборов $\{\lambda_i\}$, $\{\lambda_j\}$, когда выполнено лишь первое из условий (2.4) и, следовательно, $KS^{(2)} = 0$, дополнить равенством $D^{\text{T}}S^{(1)} = 0$, равносильным полной декомпозиции в переменных $z = Cx$, $y = D^{\text{T}}x$ эквивалентной (1.1), $u \equiv 0$ модели

$$\dot{z} = N\mathrm{F}N^{-1}z, \quad \dot{y} = D^{\text{T}}ADy,$$

то множество всех решений (2.7) примет простой вид

$$C^{\text{T}} = K^{\text{T}}N = S^{(1)}V_1, \quad K^{\text{T}} = S^{(1)}[KS^{(2)}]^{-1}, \quad N \equiv (CC^{\text{T}})^{1/2}, \tag{2.15}$$

необходимый и достаточный для полной декомпозиции (1.1), $u \equiv 0$ в переменных z, y. В общем случае и при обозначениях (2.12), (2.13) системы (2.2), (2.3) имеют вид

$$KA = \mathcal{F}K; \quad KK^{\text{T}} = I_l, \quad D^{\text{T}}D = I_m, \quad DD^{\text{T}} + K^{\text{T}}K = I_n, \quad KD = 0_{lm}, \quad D = D(K, A),$$
$$KAD = 0, \mathcal{F} = KAK^{\text{T}}; \quad Kf(A) = f(\mathcal{F})K, \quad f(\mathcal{F}) = Kf(A)K^{\text{T}}, \quad \forall \exists f(A). \tag{2.16}$$

Обозначим $h, h_{(p)}$; $a, a_{(q)}$ соответственно левый собственный вектор

$$h: h^{\text{T}}(\mathcal{F} - \lambda I_l) = 0; \quad a: a^{\text{T}}(A - \lambda I_n) = 0; \quad h \equiv h_{(1)}, \quad a \equiv a_{(1)},$$
$$h_{(p)}: h^{\text{T}}_{(p)}(\mathcal{F} - \lambda I_l)^p = 0; \quad a_{(q)}: a^{\text{T}}_{(q)}(A - \lambda I_n)^q = 0; \quad p, q > 1,$$
$$h^{\text{T}}_{(p)}(\mathcal{F} - \lambda I_l)^{p-\mu} \neq 0; \quad a^{\text{T}}_{(q)}(A - \lambda I_n)^{q-\nu} \neq 0; \quad \forall 1 \leqslant \mu, \ \nu, \ \mu \leqslant p, \ \nu \leqslant q,$$

где p, q — ранги $h_{(p)}$ и $a_{(q)}$ соответствующих λ [8].

С учетом этих обозначений и системы (2.16) для $\forall h$, $h_{(p)}$ имеем представления левого собственного вектора A, соответствующего общему $\lambda \in \lambda(\mathcal{F}) \cap \lambda(A)$ собственному числу

$$a = K^{\text{T}}h; \quad a_{(q)} = K^{\text{T}}h_{(p)}, \quad q \geqslant p > 1; \quad h_{(p)} \neq 0 \Rightarrow a_{(p)} \neq 0, \tag{2.17}$$

где p не больше кратности λ как корня характеристического полинома $\mathcal{P}_l(\lambda|\mathcal{F}) \equiv |\mathcal{F} - \lambda \mathrm{I}_l|$ вида

$$\mathcal{P}_l(\lambda|\cdot) \equiv c_l + (-1)c_{l=1}\lambda + \ldots (-1)^i c_{l-i}\lambda^i + \ldots + (-1)^l\lambda^l, \tag{2.18}$$

причем c_i — сумма всех главных миноров размера $(i \times i)$, $1 \leqslant i \leqslant l$.

Пусть $\lambda \in \lambda(\mathcal{F}) \cap \lambda(A)$. Тогда в нормальных формах $J_{\mathcal{F}}$, J_A Жордана существуют соответственно $s' \leqslant s''$ клеток $J_\sigma(\lambda|\mathcal{F})$, $J_s(\lambda|A)$ Жордана таких, что каждая J_σ-клетка будет правильной частью J_s-клетки, именно ее верхней левой субматрицей, $1 \leqslant \sigma \leqslant s'$, $1 \leqslant s \leqslant s''$.

При условии $Ke_{(p)} \neq 0$, аналогично (2.17), получим связь правых собственных векторов $v_{(p)}$, $e_{(p)}$ соответственно матриц $\mathcal{F}, A$

$$v_{(p)} = Ke_{(p)}, \quad v = Ke; \quad e_p: (A - \lambda I_n)^p e_{(p)} = 0, \quad p = \min\{2 \leqslant p \leqslant n\}. \tag{2.19}$$

Если i векторов h, $h_{(p)}$ в (2.17) независимы, то i векторов $a, a_{(p)}$, заданных равенствами (2.17), также линейно-независимы.

Можно показать, что если $e_1, e_2, \ldots, e_M$ — известный набор линейно-независимых правых собственных векторов A, $(p)=1$, то сменой нумерации получим k-мерный базис $v_h=Ke_h$ (2.19) из соответствующих собственных векторов $\mathcal{F}$, где $0<M-m\equiv k\leqslant l$, $M\leqslant n$, $1\leqslant h\leqslant k$, $m\equiv n-l$, причем отвечающие им собственные числа A лежат в $\lambda(\mathcal{F})$.

Используя в качестве f полином $\mathfrak{F}_l(\lambda, \cdot)$ (2.18) и первое условие в (2.16) найдем линейное уравнение на матрицу K, необходимое для существования допустимой пары матриц A, K системы (2.16) следующего вида

$$K\mathfrak{F}_l(\{\lambda_i\}\,|A)=0_{ln}, \quad \mathfrak{F}_l(\cdot)\equiv(A-\lambda_1 I_n)\times\ldots\times(A-\lambda_l I_n), \qquad (2.20)$$
$$\mathfrak{F}_l(\{\lambda_i\}\,|A)\equiv c_l-c_{l-1}A+\ldots+(-1)^l A^l, \quad 1\leqslant i\leqslant l.$$

Таким образом, решение нелинейной по K системы (2.16) лежит в пересечении линейного пространства решений (2.20) и всех нелинейных многообразий, заданных уравнениями (2.16) и ее следствиями вида

$$KA^sD=0 \quad \text{при} \quad 2\leqslant s\leqslant n-1. \qquad (2.21)$$

Из теоремы Гамильтона—Кэли [9] следует, что ранг матрицы $\mathfrak{F}_l(\cdot)$ уравнения (2.20) не больше $m\equiv n-l$, т. е. K — типа (2.9).

3. Задача субоптимизации по объемному функциональному критерию I_v типа фазового инварианта Лиувилля

Избрав мерой близости областей (1.10) разность их объемов, получим задачу минимизации [5]

$$I_v=|L[t_0,\cdot]|\equiv\det L[t_0,\cdot\,|\hat{K}, C]\to\min_{C,\hat{K}}; \quad C, \hat{K}\in C[\mathcal{F}] \qquad (3.1)$$

на множестве пар матриц $C, \hat{K}$, непрерывных на $\mathfrak{T}$. Будем решать ее, предполагая существование экстремальной пары $C^+[t]$, $\hat{K}^+[t]$ в (3.1), считая для простоты, что $|P_1|=|L[t_1,\cdot]|>0$ в (1.2).

Из (1.7)—(1.9) находим

$$I_v=\det P_1\exp\left[\operatorname{tr}\int_{t_0}^{t_1}(2\bar{A}+\bar{Q}L^{-1})\,d\tau\right].$$

В силу положительности и строгой монотонности $\exp I$,

где
$$I=I[C,\hat{K}]\equiv\operatorname{tr}\int_{t_0}^{t_1}(2\bar{A}+\bar{Q}L^{-1})\,d\tau, \qquad (3.2)$$

задача (3.1) эквивалентна поиску пары $C^+[t]\in C[\mathfrak{T}]$, $\hat{K}^+[t]\in C[\mathcal{F}]$, минимизирующей функционал I на множестве непрерывных матриц усиления $\hat{K}[t]$ и агрегации $C[t]$. Поэтому (3.1) является задачей Майера с критерием (3.2) при связях (1.7), (1.9), $C\in C[\mathfrak{T}]$, $\hat{K}\in C[\mathfrak{T}]$, где надо найти экстремальные $C^+[t]$, $\hat{K}^+[t]$, решающие задачу Argmin I при $\forall t\in\mathfrak{T}\equiv[t_0, t_1]$.

Используя (1.7)—(1.9) и элементарные свойства операции tr, из равенства $\delta I=0$ после длинных, но простых преобразований на основе методики [3, 6, 7], найдем определяющие $C^+[t]$, $\hat{K}^+[t]$ необходимые условия-обращения в нуль первой вариации функционала (3.2). Последние не содержат удваивающих размерность неизвестных множителей

Лагранжа и являются нелинейными относительно $\hat{K}^{+}$, C^{+} матричными уравнениями

$$C^{+}D^{+}=0_{lr},\quad D^{+}\hat{K}^{+}=0_{rl};\quad D^{+}\equiv LB+\bar{K}^{+\mathrm{T}}R,\quad \bar{K}^{+}\equiv\hat{K}^{+}C^{+}. \qquad (3.3)$$

В целях большей простоты и однозначности явных алгебраических представлений решений (3.3) относительно $\hat{K}^{+}$, C^{+} ограничимся аналогичным первому из условий распада (2.4) случаем строгого неравенства на корни $d_{\rho}^{-1}>d_{\rho+1}^{-1}$, где $0<d_{\sigma}^{-2}$ -нули ν^{-2}-полинома

$$\det\left[(K_{*}K_{*})^{\mathrm{T}}-\nu^{-2}R^{-1}\right]=0;\quad K_{*}\equiv R^{-1}B^{\mathrm{T}}L, \qquad (3.4)$$

$$0<d_1\leqslant d_2\leqslant\ldots\leqslant d_r,\quad d_{\rho+1}^{-1}<d_{\rho}^{-1},\quad 1\leqslant\sigma\leqslant r,\quad \varrho\equiv r-l.$$

С учетом (3.4) из (3.3) находим вид экстремальных матриц

$$C^{+}=-W^{-1}N_{*}G^{\mathrm{T}}S^{-1}K_{*},\quad \hat{K}^{+}=SG_{*}W,\quad \bar{K}^{+}=-SG_{*}N_{*}G_{*}^{\mathrm{T}}S^{-1}K_{*}, \qquad (3.5)$$

где приняты следующие обозначения

$$G_{*}\equiv dR_{2}^{-1},\quad d\equiv\mathrm{diag}\,(d_1, d_2, \ldots, d_r),\quad N_{*}\equiv[G_{*}^{\mathrm{T}}G_{*}]^{-1},\quad R^{-1}\equiv[R_{1}^{-1}|R_{2}^{-1}], \qquad (3.6)$$

$(l\times l)$-матрица $W=W(t)\in C[\mathcal{T}]$, $|W|\neq 0$ неособенно произвольная, $(r\times l)$-субматрица R_2^{-1} в известной матрице R^{-1} (1.3) $(r\times r)$-матрица S состоит из s_σ-собственных векторов (3.4) и удовлетворяет условию

$$R[K_{*}K_{*}^{\mathrm{T}}]S=Sd^{-2},\quad S\equiv[s_1, s_2, \ldots, s_r];\quad 1\leqslant\sigma\leqslant r. \qquad (3.7)$$

Из (3.5)—(3.7) следует, что эффективную субоптимальную по I_v (3.1) матрицу $\bar{K}^{+}$ находим из $(-1)K_{*}$ (3.4), умножая ее слева на матрицу $SP_{*}S^{-1}$, подобную матрице проектирования $P_{*}\equiv G_{*}N_{*}G_{*}^{\mathrm{T}}$. Поэтому в задаче (3.1), (3.4) представление субоптимального регулятора $\hat{u}^{+}=\hat{K}^{+}z=\bar{K}^{+}x$ (1.6) удовлетворяет обобщенной модификации принципа проектирования Аоки—Ульма [2, 6, 7].

Необходимо отметить, что в рассмотренном случае (3.4) задачи (3.1) класс (3.5) экстремальных по I_v матриц C^{+}, $\hat{K}^{+}$, $\bar{K}^{+}$ полностью совпадает с классом экстремальных матриц равномернофазовой субоптимизации в подслучае (4.4), (4.5) варианта 4 [6].

Аналогично [6, 7] в синтезе регулятора $\hat{u}^{+}$ надо на каждом шаге решать $2(n\times n)$-мерную линейно-квадратичную задачу (1.7), (1.9) Коши совместно с алгебраической задачей (3.4), (3.7) поиска d_σ, S, но значения $\bar{K}^{+}$ не надо сохранять в памяти ЭВМ, причем размерность множества искомых элементов $\hat{K}^{+}[t]$, $C^{+}[t]$ (3.5) существенно ниже размерности $K^{0}[t]$ (1.4), так как $l(n\times r)\ll nr$ при $l<r$, $l\ll n$. В поиске $\hat{u}^{+}[t]$ не используются множители Лагранжа, что упрощает и стабилизирует процесс синтеза $\hat{u}^{+}$. Другим преимуществом $\hat{u}^{+}[t]$ служит то, что это управление сформировано лишь по выходу $z[t]$, поскольку $\hat{u}^{+}=\hat{K}^{+}z$.

При решении задачи (3.1) в случае стационарной системы (1.1), (1.2), (2.3), $t_1=+\infty$, на основе точной декомпозиции раздела 2 необходимо провести модификацию результатов (3.3)—(3.5), соответствующую тому обстоятельству, что роль постоянной C, заданной одним из равенств (2.9), (2.15), (2.16), (2.20), (2.21), в нем исполняет соответствующая свободная постоянная $(l\times l)$-матрица V_1.

В общем случае в численном поиске I_v-субоптимальных матриц $C^{+}[t]$, $\hat{K}^{+}[t]$, $\bar{K}^{+}[t]$ можно на основе условий (1.7), (1.9), (3.3) использовать метод градиентов аналогично [7].

В расчетных схемах и аналитических методах исследования и решения задач (1.1) (1.2), (3.1), а также «иерархической» по Φ, L системы (1.9), (1.7) задач субоптимизации по $\hat{J}$, основанных на агрегации — декомпозиции типа (1.6) [1–6, 7], большое значение имеют информация и гипотезы о свойствах и представлении решения $(n\times n)$-мерного линейного уравнения

$$\dot{X}=\bar{A}[t]X,\quad X(t,t)=I_n;\quad \bar{A}[t]\in C[\mathcal{T}_\infty],\quad \mathcal{T}_\infty=(-\infty,+\infty), \tag{3.8}$$

которые лишь в случаях постоянной или периодической $\bar{A}[t+T]\equiv\equiv\bar{A}[t]$, $\forall t\in\mathcal{T}_\infty$, $0<T=\mathrm{const}$ имеют известный вид

$$X=X_{(s)}\equiv\exp\left[(t-\tau)A\right],\quad X=X_{(p)}=P(t,\tau)\exp\left[(t-\varepsilon)\bar{F}\right];\quad M=\mathrm{const},$$
$$P(t+T,\cdot)\equiv P(t,\cdot),\quad P(\tau,\tau)=I_n,\quad \bar{F}=\frac{\ln M}{T}, \tag{3.9}$$
$$M=X^{-1}_{(p)}(t,\cdot)X_{(p)}(t+T,\cdot).$$

Рассмотрим условия на $\bar{A}[t]$, когда (3.8) имеет решение [9]

$$X(t,\tau)=X_*[t,\tau|\bar{A}]=\exp\left[\int_\tau^t A(s)\,ds\right]. \tag{3.10}$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы при $\forall\tau$, $t\in\mathcal{T}_\infty$ $\bar{A}[t]$ удовлетворяла интегральному матричному уравнению [9]

$$\int_\tau^t[\bar{A}[t],\bar{A}[s]]\,ds=0;\quad [\bar{A}(t),\bar{A}[s]]\equiv\bar{A}[t]\bar{A}[s]-\bar{A}[s]\bar{A}[t]. \tag{3.11}$$

Из (3.8) и теоремы о среднем следует эквивалентность (3.11) условию коммутативности

$$[\bar{A}[t],\bar{A}[\tau]]\equiv 0,\quad \forall\tau,\ t\in\mathcal{T}_\infty\equiv(-\infty,+\infty). \tag{3.12}$$

Если $\bar{A}$ — симметричная матрица на $\mathcal{T}_\infty$, то для выполнения (3.12) необходимо и достаточно, чтобы ее приводящая ортогональная матрица $\bar{R}$ была постоянной

$$\bar{A}[t]=\bar{R}^0\lambda(t)\bar{R}^{0^{\mathrm{T}}};\quad \lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n),\quad \bar{R}^0=\mathrm{const},\quad \bar{R}^0\bar{R}^{0^{\mathrm{T}}}=I_n. \tag{3.13}$$

При простой на $\mathcal{T}_\infty$ матрице $\bar{A}[t]$ условие (3.12) выполнено, если постоянны все ее собственные векторы s_k, когда

$$\bar{A}[t]=S^0\lambda(t)S^{0^{-1}},\quad S^0=[s^0_1,\ s^0_2,\ \ldots,\ s^0_n],\quad s^0_k=\mathrm{const},\quad 1\leqslant k\leqslant n. \tag{3.14}$$

Если $\bar{A}[t]$ — аналитическая $\bar{A}_\infty$ на $\mathcal{T}_\infty$, то, дифференцируя (3.12) в $\forall t\in\mathcal{T}_\infty$, найдем эквивалентную (3.12) бесконечную систему уравнений в коммутаторах

$$[\bar{A}^{(i)},\bar{A}^{(j)}]=0,\quad \forall t\in\mathcal{T}_\infty;\quad \bar{A}^{(\sigma)}\equiv\frac{d^\sigma}{dt^\sigma}\bar{A}[t],\quad \bar{A}^{(0)}\equiv\bar{A},\quad 0\leqslant i,\ j,\ \sigma\leqslant\infty. \tag{3.15}$$

Все условия (3.15) выполнены, если $\bar{A}[t]$ удовлетворяет матричному уравнению с аналитической f_∞ на $\mathcal{T}_\infty$ функцией $f[t]$

$$\dot{A}=f[A]\Leftrightarrow A=\varphi(t,A_0),\quad A_0\equiv\varphi(0,A_0), \tag{3.16}$$

где f — скалярная функция, а $\varphi(\tau+t,A_0)\equiv\varphi(t,\varphi(\tau,A_0))$.

Условия (3.15) выполнены, если C постоянна и перестановочна с A, причем $\dot{A}=CA$; условия (3.16) для этого уравнения удовлетворяются, когда $C=f_\infty(A)$, либо $C\equiv 0$. Равенства (3.12)—(3.16) уточняют нестрогое утверждение, что «условия (3.11), как правило, выполняются» ([9] с. 227).

Лишь для классов $\bar{A}[t]$, заданных (3.12), либо, в частности, одним из условий (3.13)—(3.16) справедливо сравнительно простое и удобное для исследований и счета представление X_* (3.10) решения (3.8).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aoki, M.* // Joint Automat. Control Conf. Preprint Papers. New York, 1967. 178—179.
2. *Aoki, M.* Optimization Methods for Large-Scale Systems, 5 Aggregation. New York, Mc-Graw Hill Book Company, 191—232.
3. *Kleinman, D. L., Athans, M.* // IEEE Trans. Automat. Contr., 1968, **13**, № 2, 150—159.
4. *Meditch, J. S.* // IEEE Trans. Automat. Contr., 1966, **11**, № 3, 433—439.
5. *Кейс И.* // Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 1984, **33**, № 2, 201—205.
6. *Кейс И.* // Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 1986, **35**, № 3, 263—270.
7. *Ульм С. Ю.* Методы декомпозиции для решения задач оптимизации. Таллин, Валгус, 1979.
8. *Воронов А. А.* Введение в динамику сложных управляемых систем. М., Наука, 1985.
9. *Рорер Р., Директор С.* Введение в теорию систем. М., Мир, 1974.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
25/XII 1987

I. KEIS

MITMEMÕÕTMELISTE SÜSTEEMIDE REGULAATORITE SUBOPTIMAALNE SÜNTEES RUUMALA KRITEERIUMI JÄRGI JA DÜNAAMIKA LINEAARSEL AGREGEERIMISMEETODIL

On vaadeldud ruutoptimaalsusfunktsionaaliga (1.2) mittestatsionaarse lineaarse süsteemi (1.1) juhtimisülesannet. Liuville'i ruumala kriteeriumi alusel (1.10), (3.1) on uuritud agregeerimis- ja võimendusmaatriksi ning ligikaudsete suboptimaalsete regulaatorite (1.6) määramise võimalust. On saadud vajalikud ekstreemumtingimused (3.3)—(3.7) agregeerimis- ja võimendusmaatriksitele (1.6) ning esitatud regulaatorid, mis vastavad uuritud variandile.

Statsionaarse täpse dekompositsiooni juhul (2.2) on leitud tarvilikud ja piisavad tingimused agregeerimismaatriksi määramiseks (vt. (2.9), (2.10), (2.15), (2.16), (2.20), (2.21)).

On esitatud algebralised seosed omavektorite teisendamiseks, millede abil saadakse süsteemist (1.1) süsteem (2.1), kus $u=0$.

I. KEIS

ON DYNAMICS AND SUBOPTIMAL FOR VOLUME CRITERION CONTROL SYNTHESIS IN THE MULTIDIMENSIONAL SYSTEM VIA THE LINEAR AGGREGATION METHOD

The control problem of the large-scale linear dynamic system (1.1) governed by the quadratic performance criterion (1.2) is considered in the paper.

The concept of direct aggregation (1.6) is applied here in order to account for the possibility of the incomplete state feedback and/or the demand to develop computationally more efficient procedures in partly optimal linear control construction via output signals.

With this aim the problem of the gain and aggregation matrix optimal choice relevant for Liuville-type volume criterion (1.10), (3.1) is investigated.

As a result, necessary conditions (3.3)—(3.7) are obtained for extremal gain and aggregation matrices (1.6). Hence, linear suboptimal in output signal associated with matrices (3.5) are derived to advance the investigations of M. Athans, D. L. Kleinman and S. J. Ulm.

In the exact decomposition stationary case (2.2) necessary and sufficient conditions on aggregation matrix (see (2.9), (2.10), (2.15), (2.16), (2.20), (2.21)) are established. Relevant algebraic rules concerning this type of aggregation transform are obtained in relations (2.17)—(2.19) between Eigenvectors of initial (1.1) and its aggregate (2.1) models when $u=0$. As by-product of the paper special conditions (3.12)—(3.16) are provided for (3.10) being the solution of the (3.8) equation.