EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1988, 37, 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1988.2.15

УДК 621.391

И. АРРО

АЛГОРИТМ СОКРАЩЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО КОСИНУСНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

I. ARRO. DISKREETSE FOURIER' KOOSINUSTEISENDUSE KOONDARVUTUSALGORITM

I. ARRO. VERKÜRZTER ALGORITHMUS FÜR DIE DISKRETE KOSINUS-FOURIER-TRANSFORMATION

(Представил Н. Алумяэ)

1. Введение

В практике цифровой обработки сигналов исходные величины являются вещественными. Образующиеся при этом массивы данных могут быть четными, нечетными или смешанными. Поэтому особое значение имеют алгоритмы, позволяющие высокоэффективно обрабатывать исходные данные непосредственно с учетом их особенностей.

Предлагается новый алгоритм косинусного преобразования Фурье вещественного массива данных, который выполняется вдвое меньшим количеством операций умножения и сложения (вычитания) по сравнению с количеством соответствующих операций алгоритма сокращенного вычисления дискретного преобразования Фурье [1, 2].

2. Постановка задачи

Требуется вычислить дискретное косинусное преобразование Фурье (ДКПФ) $XC(K)$ от исходного вещественного массива $Y(I)$, $I=\overline{0,(N-1)}$, $K=\overline{0,\ N/2}$ $(XC(K)=XC(N-K))$, $N=2^{LP}$, LP — натуральное число, т. е.

$$XC(K)=\sum_{I=0}^{N-1} Y(I)\cos(2\pi IK/N). \tag{1}$$

Выполняя преобразования

$$CZ(I)=Y(I)+Y(N-I),\quad I=\overline{0,\ N/2},\quad (Y(N)=(0)) \tag{2}$$

и принимая за основу алгоритм сокращенного вычисления дискретного преобразования Фурье [1], можно формулу (1) представить в виде композиции следующих последовательных независящих друг от друга выражений:

$$\begin{gathered}XC(R(2k+1))=C_M(R(2k+1))+C_{M/2}(R(2k+1))+\\+\ldots+C_8(R(2k+1))+ZC(0),\quad R\leqslant N/8,\end{gathered} \tag{3}$$

$$R=2^r,\quad r=\overline{0,\ (LP-3)},\quad k=\overline{0,\ (N/4R-1)},$$

$$C_{M/P}((2k+1)N/M)=\sum_{I=0}^{M/8P-1} ZC((2I+1)P)\times$$
$$\times\cos(2\pi(2I+1)(2k+1)/(M/P)), \quad (4)$$

$$P=2^{\alpha},\quad M=2^{LM},\quad LM=LP-r,\quad \alpha=\overline{0,\ (LM-3)},$$
$$k=\overline{0,\ (M/8P-1)},$$

$$ZC(I)=CZ(I)-CZ(M/2-I), \quad (5)$$
$$CZ(I)=CZ(I)+CZ(M/2-I), \quad (6)$$
$$I=\overline{0,\ (M/4-1)},\quad M=N/R.$$

Таким образом, ДКПФ сведено к вычислениям нечетных косинусных трансформантов согласно формуле (4).

3. Сокращенное вычисление нечетного косинусного трансформанта с периодом N

Без ущерба для общности, далее, положим $M=N$, $P=I$ и представим $C_N(2K+1)$ $(K=\overline{0,\ (N/8-1)})$ в следующем виде:

$$C_N(2K+1)=\sum_{q=0}^{N/4G-1} RC(Q;\ 2K+1), \quad (7)$$

$$Q=4q+1,\quad q=\overline{0,\ (N/4G-1)},\quad K=\overline{0,\ (G/4-1)},$$
$$RC(Q;\ 2K+1)=\cos(2\pi Q(2K+1)/N)\cdot XC_G^Q(2K+1)-$$
$$-\sin(2\pi Q(2K+1)/N)XS_G^Q(2K+1), \quad (8)$$

$$XC_G^Q(2K+1)=ZC(Q)+\sum_{I=1}^{G/4-1}(ZC(NI/G+Q)+ZC(NI/G-Q))\times$$
$$\times\cos(2\pi(2K+1)I/G), \quad (9)$$

$$XS_G^Q(2K+1)=ZC(N/4-Q)+\sum_{I=1}^{G/4-1}(ZC(NI/G+Q)-$$
$$-ZC(NI/G-Q))\sin(2\pi(2K+1)I/G), \quad (10)$$
$$4\leqslant G\leqslant N/4.$$

Аналогично [1] осуществим распространение области спектра $K=\overline{0,\ (G/4-1)}$ в область $K=\overline{0,\ (N/8-1)}$ путем замены $2K+1$ на $GH\pm(2K+1)$.
Тогда

$$XC_G^Q(GH\pm(2K+1))=XC_G^Q(2K+1), \quad (11)$$

$$XS_G^Q(GH\pm(2K+1))=\pm XS_G^Q(2K+1) \quad (12)$$

и

$$RC(Q;\ GH\pm(2K+1))=\cos(2\pi QH/(N/G))RC(Q;\ 2K+1)\mp$$
$$\mp\sin(2\pi QH/(N/G))RS(Q;\ 2K+1), \quad (13)$$
$$RS(Q;\ 2K+1)=\sin(2\pi Q(2K+1)/N)XC_G^Q(2K+1)+$$
$$+\cos(2\pi Q(2K+1)/N)XS_G^Q(2K+1), \quad (14)$$
$$H=\overline{0,\ N/4G},$$

$$C_N(GH\pm(2K+1))=\sum_{q=0}^{N/4G-1} RC(4q+1;\ GH\pm(2K+1)). \tag{15}$$

Здесь уместно указать, что нечетное синусное преобразование (формула (10))

$$XS(2K+1)=\sum_{I=1}^{G/4-1} ZS(I)\sin(2\pi(2K+1)I/G)) \tag{16}$$

целесообразно выполнить через косинусное, так как при замене I на $G/4-I$ получим

$$XS(2K+1)=(-1)^K\sum_{I=1}^{G/4-1} ZS(G/4-I)\cos(2\pi(2K+1)I/G)), \tag{17}$$

$$K=\overline{0,\ (G/4-1)}.$$

Таким образом, вычисление нечетного косинусного трансформанта с периодом N для любого $4\leqslant G\leqslant N/4$ выполнимо (формулы (7)—(17)) через нечетные косинусные преобразования с периодом G и спектральное расширение (формулы (13) и (15)).

4. Заключение

Предложен алгоритм сокращенного вычисления дискретного косинусного преобразования Фурье (СДКПФ), который выполняется с наименьшим числом арифметических операций (по сравнению со всеми известными аналогичными процедурами). Алгоритм СДКПФ является рекурсивным и, следовательно, эффективно программируемым. На уровне четной части реализации ($CZ(I)$, формула (2)) дважды последовательное применение СДКПФ восстанавливает исходный массив. Это означает, что все преобразования спектрально-корреляционного анализа, которые выполнимы по прямому и обратному дискретным преобразованиям Фирье (ДПФ), могут быть реализованы на основе СДКПФ и сумма-разностных преобразований, необходимых для декомпозиции (или композиции) функции вещественного переменного на четные и нечетные части.

Так, ДПФ вещественного массива может быть выполнено, применяя в отдельности СДКПФ для четной и нечетной (с учетом формулы (17)) частей исходной реализации. Обратное ДПФ выполняется с помощью восстановления четной и нечетной частей и их композицией.

Особую роль СДКПФ играет в задачах вычисления свертки, поскольку теперь общее количество операций может быть поставлено в непосредственную зависимость от характера исходной реализации и весовой функции: обе функции могут быть только четными или нечетными, или содержать как четную, так и нечетную части.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арро И.* Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., **36**, № 1, 21—29 (1987).
2. *Арро И. О.* В кн.: Методы и средства измерения, преобразования и обработки информации. Таллин, АН ЭССР, 1987, 8—18.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
22/V 1987