

УДК 621.391

И. АРРО

АЛГОРИТМ СОКРАЩЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО КОСИНУСНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

I. ARRO. DISKREETSE FOURIER' KOOSINUSTEISENDUSE KOONDARVUTUSALGORITM

I. ARRO. VERKÜRZTER ALGORITHMUS FÜR DIE DISKRETE KOSINUS-FOURIER-TRANSFORMATION

(Представил Н. Алумяэ)

1. Введение

В практике цифровой обработки сигналов исходные величины являются вещественными. Образующиеся при этом массивы данных могут быть четными, нечетными или смешанными. Поэтому особое значение имеют алгоритмы, позволяющие высокоэффективно обрабатывать исходные данные непосредственно с учетом их особенностей.

Предлагается новый алгоритм косинусного преобразования Фурье вещественного массива данных, который выполняется вдвое меньшим количеством операций умножения и сложения (вычитания) по сравнению с количеством соответствующих операций алгоритма сокращенного вычисления дискретного преобразования Фурье [1, 2].

2. Постановка задачи

Требуется вычислить дискретное косинусное преобразование Фурье (ДКПФ) $XC(K)$ от исходного вещественного массива $Y(I)$, $I = \overline{0, (N-1)}$, $K = \overline{0, N/2}$ ($XC(K) = XC(N-K)$), $N = 2^{LP}$, LP — натуральное число, т. е.

$$XC(K) = \sum_{I=0}^{N-1} Y(I) \cos(2\pi IK/N). \quad (1)$$

Выполняя преобразования

$$CZ(I) = Y(I) + Y(N-I), \quad I = \overline{0, N/2}, \quad (Y(N) = (0)) \quad (2)$$

и принимая за основу алгоритм сокращенного вычисления дискретного преобразования Фурье [1], можно формулу (1) представить в виде композиции следующих последовательных независимых друг от друга выражений:

$$XC(R(2k+1)) = C_M(R(2k+1)) + C_{M/2}(R(2k+1)) + \dots + C_8(R(2k+1)) + ZC(0), \quad R \leq N/8, \quad (3)$$

$$R = 2^r, \quad r = \overline{0, (LP-3)}, \quad k = \overline{0, (N/4R-1)},$$

$$C_{M/P}((2k+1)N/M) = \sum_{I=0}^{M/8P-1} ZC((2I+1)P) \times \\ \times \cos(2\pi(2I+1)(2k+1)/(M/P)), \quad (4)$$

$$P=2^\alpha, \quad M=2^{LM}, \quad LM=LP-r, \quad \alpha=0, \quad \overline{(LM-3)},$$

$$k=0, \quad \overline{(M/8P-1)},$$

$$ZC(I) = CZ(I) - CZ(M/2 - I), \quad (5)$$

$$CZ(I) = CZ(I) + CZ(M/2 - I), \quad (6)$$

$$I=0, \quad \overline{(M/4-1)}, \quad M=N/R.$$

Таким образом, ДКПФ сведено к вычислениям нечетных косинусных трансформантов согласно формуле (4).

3. Сокращенное вычисление нечетного косинусного трансформанта с периодом N

Без ущерба для общности, далее, положим $M=N$, $P=I$ и представим $C_N(2K+1)$ ($K=0, \overline{(N/8-1)}$) в следующем виде:

$$C_N(2K+1) = \sum_{q=0}^{N/4G-1} RC(Q; 2K+1), \quad (7)$$

$$Q=4q+1, \quad q=0, \overline{(N/4G-1)}, \quad K=0, \overline{(G/4-1)},$$

$$RC(Q; 2K+1) = \cos(2\pi Q(2K+1)/N) \cdot XC_G^Q(2K+1) - \\ - \sin(2\pi Q(2K+1)/N) XS_G^Q(2K+1), \quad (8)$$

$$XC_G^Q(2K+1) = ZC(Q) + \sum_{I=1}^{G/4-1} (ZC(NI/G+Q) + ZC(NI/G-Q)) \times \\ \times \cos(2\pi(2K+1)I/G), \quad (9)$$

$$XS_G^Q(2K+1) = ZC(N/4-Q) + \sum_{I=1}^{G/4-1} (ZC(NI/G+Q) - \\ - ZC(NI/G-Q)) \sin(2\pi(2K+1)I/G), \quad (10)$$

$$4 \leq G \leq N/4.$$

Аналогично [1] осуществим распространение области спектра $K=0, \overline{(G/4-1)}$ в область $K=0, \overline{(N/8-1)}$ путем замены $2K+1$ на $GH \pm (2K+1)$.

Тогда

$$XC_G^Q(GH \pm (2K+1)) = XC_G^Q(2K+1), \quad (11)$$

$$XS_G^Q(GH \pm (2K+1)) = \pm XS_G^Q(2K+1) \quad (12)$$

и

$$RC(Q; GH \pm (2K+1)) = \cos(2\pi QH/(N/G)) RC(Q; 2K+1) \mp \\ \mp \sin(2\pi QH/(N/G)) RS(Q; 2K+1), \quad (13)$$

$$RS(Q; 2K+1) = \sin(2\pi Q(2K+1)/N) XC_G^Q(2K+1) + \\ + \cos(2\pi Q(2K+1)/N) XS_G^Q(2K+1), \quad (14)$$

$$H=0, \quad \overline{N/4G},$$

$$C_N(GH \pm (2K+1)) = \sum_{q=0}^{N/4G-1} RC(4q+1; GH \pm (2K+1)). \quad (15)$$

Здесь уместно указать, что нечетное синусное преобразование (формула (10))

$$XS(2K+1) = \sum_{I=1}^{G/4-1} ZS(I) \sin(2\pi(2K+1)I/G) \quad (16)$$

целесообразно выполнить через косинусное, так как при замене I на $G/4-I$ получим

$$XS(2K+1) = (-1)^K \sum_{I=1}^{G/4-1} ZS(G/4-I) \cos(2\pi(2K+1)I/G), \quad (17)$$

$$K = \overline{0, (G/4-1)}.$$

Таким образом, вычисление нечетного косинусного трансформанта с периодом N для любого $4 \leq G \leq N/4$ выполнимо (формулы (7)–(17)) через нечетные косинусные преобразования с периодом G и спектральное расширение (формулы (13) и (15)).

4. Заключение

Предложен алгоритм сокращенного вычисления дискретного косинусного преобразования Фурье (СДКПФ), который выполняется с наименьшим числом арифметических операций (по сравнению со всеми известными аналогичными процедурами). Алгоритм СДКПФ является рекурсивным и, следовательно, эффективно программируемым. На уровне четной части реализации ($CZ(I)$, формула (2)) дважды последовательное применение СДКПФ восстанавливает исходный массив. Это означает, что все преобразования спектрально-корреляционного анализа, которые выполняются по прямому и обратному дискретным преобразованиям Фурье (ДПФ), могут быть реализованы на основе СДКПФ и сумма-разностных преобразований, необходимых для декомпозиции (или композиции) функции вещественного переменного на четные и нечетные части.

Так, ДПФ вещественного массива может быть выполнено, применяя в отдельности СДКПФ для четной и нечетной (с учетом формулы (17)) частей исходной реализации. Обратное ДПФ выполняется с помощью восстановления четной и нечетной частей и их композиции.

Особую роль СДКПФ играет в задачах вычисления свертки, поскольку теперь общее количество операций может быть поставлено в непосредственную зависимость от характера исходной реализации и весовой функции: обе функции могут быть только четными или нечетными, или содержать как четную, так и нечетную части.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арро И. Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 36, № 1, 21–29 (1987).
2. Арро И. О. В кн.: Методы и средства измерения, преобразования и обработки информации. Таллин, АН ЭССР, 1987, 8–18.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
22/V 1987