EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1988, 37, 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1988.2.14

УДК 62—501.7

И. РАНДВЕЭ

АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ ОДНОНАПРАВЛЕННЫМИ ПОДСИСТЕМАМИ

I. RANDVEE. AHELSÜSTEEMIDE JUHTTOIMETE VALIKU ALGORITM

I. RANDVEE. CONTROL ALGORITHM FOR SERIALLY CONNECTED SYSTEMS

(Представил Ю. Яаксоо)

Модели многих технологических объектов представляются в виде звеньев, соединенных согласно структуре ориентированного ациклического графа. Задачи управления подобными системами предложено решать методами декомпозиции — координации в рамках больших систем с общей структурой взаимосвязей [1, 2].

В данном сообщении предлагается алгоритм решения задачи оптимального управления цепью звеньев, который учитывает однонаправленность взаимосвязей.

1. Задача состоит в нахождении управлений $u_i(t) \in R^{m_i}$, $i=1, 2, \ldots$ $\ldots, N$, которые удовлетворяют уравнению

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + z_i, \qquad z_i = \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j \tag{1}$$

при заданном $x_i(t_0) \in R^{n_i}$ и минимизируют общий для всей цепи критерий в виде суммы локальных критериев звеньев J_i,

$$J_i = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{T} (x'_i Q_i x_i + u'_i R_i u_i)\, \mathrm{dt}, \tag{2}$$

где $Q_i \geqslant 0$, $R_i > 0$ — симметричные матрицы, при заданных A_i, B_i, A_{ij}.

Общая схема декомпозиции—координации для решения задачи (1), (2) предусматривает определение функции

$$P(w) = \min_{x_i u_i} L(x_i, u_i, z_i, w),$$

$$L = \int_{t_0}^{T} \sum_{i=1}^{N} \Big[\frac{1}{2} (x'_i Q_i x_i + u'_i R_i u_i) + p'_i (-\dot{x}_i + A_i x_i + B_i u_i + z_i) + w'_i \Big(z_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j \Big) \Big] \mathrm{dt}.$$

Максимум функции $P(w)$ по переменной w равняется минимуму критерия J по переменным u_i [1]. Необходимые условия этого

$$z_i = \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j, \tag{3}$$

$$w_i = -p_i.$$

Искомое оптимальное управление при известных z_i и w_i определяется, согласно принципу оптимальности, решением следующей двухточечной краевой задачи:

$$\dot{x}_i = A_i x_i - B_i R_i^{-1} B'_i p_i + z_i, \qquad x_i(t_0) = x_{i0}, \tag{5}$$

$$\dot{p}_i = -A'_i p_i - Q_i x_i + v_i, \qquad p_i(T) = 0, \tag{6}$$

где

$$v_i = \sum_{k=i+1}^{N} A'_{ik} w_k. \tag{7}$$

Предположим, что решение уравнения (6) для сопряженной переменной i-го звена — линейная функция вектора состояния

$$p_i = K_i x_i + g_i.$$

Подставим это решение и его производную (в которой $\dot{x}_i$ заменен выражением (5)) в уравнение (6). Для обеспечения справедливости результирующего уравнения при любом $x(t)$ необходимо, чтобы

$$\dot{K}_i + K_i A_i + A'_i K_i - K_i B_i R_i^{-1} B'_i K_i + Q_i = 0, \quad K_i(T) = 0, \tag{8}$$

и

$$\dot{g}_i = (K_i B_i R_i^{-1} B'_i - A'_i) g_i - K_i z_i + v_i, \qquad g_1(T) = 0. \tag{9}$$

Оптимальное управление каждым i-м звеном цепи при выполнении (8) и (9) должно состоять из локально-замкнутой и обусловленной взаимосвязями частей

$$u_i = -R_i^{-1} B'_i K_i x_i - R_i^{-1} B'_i g_i. \tag{10}$$

2. Для уточнения слагаемого g_i в законе управления (10) организуется следующий итерационный процесс (алгоритм) на двух уровнях, отличающийся от общей схемы декомпозиции—координации [1, 3] тем, что ограничения по вектору взаимосвязей z_i выполняются при всех допустимых значениях вектора координации v_i.

На первом уровне при фиксированном векторе v_i решается уравнение (9) для первой подсистемы. Подставляя (10) в (1) находим оптимальную траекторию $x_1(t, v_1)$, которая используется в (3) для определения вектора z_i для последующей подсистемы. Данная процедура повторяется последовательно от i к $i+1$ до последнего звена цепи. Далее, используя условие (4) и выражение (7), устанавливается новое значение вектора v_i и его уточненное значение v_i^{c+1} для следующего шага итерации на первом уровне $v_i^{c+1} = \Omega v_i + (I - \Omega) v_i^c$, где c — номер итерации, Ω — релаксационная матрица.

Отметим, что при вышеуказанных условиях постановки задачи все замкнутые локальной обратной связью звенья устойчивы, в том числе и в важном частном случае $v_i = 0$. Это значение вектора координации можно принять за начальное.

3. Рассмотрим случай $v_i = 0$ более подробно. Вектор управления каждым (i-м) звеном при $v_i = 0$ фактически определяется независимо от всех остальных звеньев в виде задачи минимизации локальной функции цепи (2) при известных внешних воздействиях. Эти воздействия заданы уравнениями движения предшествующих локально-замкнутых звеньев. Уточним сказанное на примере бесконечной цепи $N = 1, 2, \ldots$ звеньев одинаковой размерности, в которой i-е звено связано со всеми предшествующими звеньями согласно уравнению (1).

Первая подсистема не связана, ее движение $\dot{x}_i = \bar{A}_1 x_1$ определяется уравнениями (1), (10) и алгебраическим вариантом уравнения Риккати (8). Оптимальное управление второй подсистемой, состоящей из первых двух звеньев, должно уже удовлетворять расширенному уравнению

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_1 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ B_2 \end{vmatrix} u_2 \tag{11}$$

и минимизировать критерий (2) для $i=2$.

Закон оптимального управления определяется, учитывая вид матрицы $\tilde{B}_2$ в (11), только элементами нижней блочной строки $2n\times 2n$ матрицы $\tilde{K}_2$ — решения алгебраического уравнения Риккати для задачи (2), (11). Нижняя строка этого уравнения образует систему, которая решается последовательно относительно элементов K_{22} и K_{21} и в общем случае i-го звена — последовательно для элементов K_{ii}, $K_{i,i-1}, \ldots, K_{i,1}$.

Оптимальное управление i-м звеном цепи принимает вид

$$u_i = -R_i^{-1} B_i' \sum_{j=1}^{i} K_{ij} x_j , \tag{12}$$

где K_{ii} определяется алгебраическим уравнением Риккати i-го звена, а матрицы K_{ij} вычисляются последовательно по индексу $j=i-1, \ldots$ ..., из уравнения

$$K_{ij}\bar{A}_j + \bar{A}_i' K_{ij} = -K_{ii} B_j A_{ij} - \sum_{k=j+1}^{i-1} K_{ik} \bar{A}_{kj}, \tag{13}$$

где $\bar{A}_i = (A_i - B_i R_i^{-1} B_i' K_{ii}$ и $\bar{A}_{kj} = (A_{kj} - R_k^{-1} B_k' K_{kj})$. Матрицы $\bar{A}_j$, $\bar{A}_{kj}$ известны — они найдены при оптимизации предшествующих звеньев. Решение уравнения (13) существует, поскольку все $\bar{A}_j$, $j=1, 2, \ldots, i$ есть матрицы устойчивых подсистем.

Отметим, что в цепи звеньев с локальными регуляторами реализуется равновесное состояние по Нэшу, поскольку закон управления i-м звеном (12) оптимален при любых значениях вектора состояния остальных звеньев.

Как следствие, качество управления, характеризуемого суммой минимальных значений локальных критериев (2), не лучше, чем в случае использования закона управления (10).

Управление цепью динамических подсистем по предложенному алгоритму реализуется в режиме реального времени. Ограничения по взаимосвязям не нарушаются при итерациях минимизации функции цели, что позволяет использовать названный алгоритм для улучшения качества функционирования технологических аппаратов, управляемых по закону (12) [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ульм С. Ю.* Методы декомпозиции для решения оптимизации. Таллин, «Валгус», 1979.
2. *Миркин Б. М.* Автоматиз. проектир. АУ ТП. Фрунзе, 1986, 45—53.
3. *Рандвеэ И.* Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., **30**, № 1, 35—46 (1981).
4. *Рандвеэ И.* В кн.: Математическое моделирование сложных химико-технологических систем. Докл. III всес. конф., ч. 2. Таллин, 1982, 109.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
5/V 1987