

УДК 62—501.7

И. РАНДВЕЭ

АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ ОДНОНАПРАВЛЕННЫМИ
ПОДСИСТЕМАМИ

I. RANDVEE. AHELSUSTEEMIDE JUHTTOIMETE VALIKU ALGORITM

I. RANDVEE. CONTROL ALGORITHM FOR SERIALY CONNECTED SYSTEMS

(Представил Ю. Яаксоо)

Модели многих технологических объектов представляются в виде звеньев, соединенных согласно структуре ориентированного ациклического графа. Задачи управления подобными системами предложено решать методами декомпозиции — координации в рамках больших систем с общей структурой взаимосвязей [1, 2].

В данном сообщении предлагается алгоритм решения задачи оптимального управления цепью звеньев, который учитывает однонаправленность взаимосвязей.

1. Задача состоит в нахождении управлений $u_i(t) \in R^{m_i}$, $i=1, 2, \dots, N$, которые удовлетворяют уравнению

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + z_i, \quad (1)$$

$$z_i = \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j$$

при заданном $x_i(t_0) \in R^{n_i}$ и минимизируют общий для всей цепи критерий в виде суммы локальных критериев звеньев J_i ,

$$J_i = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (x_i' Q_i x_i + u_i' R_i u_i) dt, \quad (2)$$

где $Q_i \geq 0$, $R_i > 0$ — симметричные матрицы, при заданных A_i , B_i , A_{ij} .

Общая схема декомпозиции—координации для решения задачи (1), (2) предусматривает определение функции

$$P(w) = \min_{x_i, u_i} L(x_i, u_i, z_i, w),$$

$$L = \int_{t_0}^T \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} (x_i' Q_i x_i + u_i' R_i u_i) + p_i' (-\dot{x}_i + A_i x_i + B_i u_i + z_i) + \right. \\ \left. + w_i' \left(z_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j \right) \right] dt.$$

Максимум функции $P(w)$ по переменной w равняется минимуму критерия J по переменным u_i [1]. Необходимые условия этого

$$z_i = \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j, \quad (3)$$

$$w_i = -p_i.$$

Искомое оптимальное управление при известных z_i и w_i определяется, согласно принципу оптимальности, решением следующей двухточечной краевой задачи:

$$\dot{x}_i = A_i x_i - B_i R_i^{-1} B_i' p_i + z_i, \quad x_i(t_0) = x_{i0}, \quad (5)$$

$$\dot{p}_i = -A_i' p_i - Q_i x_i + v_i, \quad p_i(T) = 0, \quad (6)$$

где

$$v_i = \sum_{h=i+1}^N A'_{ih} w_h. \quad (7)$$

Предположим, что решение уравнения (6) для сопряженной переменной i -го звена — линейная функция вектора состояния

$$p_i = K_i x_i + g_i.$$

Подставим это решение и его производную (в которой \dot{x}_i заменен выражением (5)) в уравнение (6). Для обеспечения справедливости результирующего уравнения при любом $x(t)$ необходимо, чтобы

$$\dot{K}_i + K_i A_i + A_i' K_i - K_i B_i R_i^{-1} B_i' K_i + Q_i = 0, \quad K_i(T) = 0, \quad (8)$$

и

$$\dot{g}_i = (K_i B_i R_i^{-1} B_i' - A_i') g_i - K_i z_i + v_i, \quad g_i(T) = 0. \quad (9)$$

Оптимальное управление каждым i -м звеном цепи при выполнении (8) и (9) должно состоять из локально-замкнутой и обусловленной взаимосвязями частей

$$u_i = -R_i^{-1} B_i' K_i x_i - R_i^{-1} B_i' g_i. \quad (10)$$

2. Для уточнения слагаемого g_i в законе управления (10) организуется следующий итерационный процесс (алгоритм) на двух уровнях, отличающийся от общей схемы декомпозиции—координации [1, 3] тем, что ограничения по вектору взаимосвязей z_i выполняются при всех допустимых значениях вектора координации v_i .

На первом уровне при фиксированном векторе v_i решается уравнение (9) для первой подсистемы. Подставляя (10) в (1) находим оптимальную траекторию $x_i(t, v_i)$, которая используется в (3) для определения вектора z_i для последующей подсистемы. Данная процедура повторяется последовательно от i к $i+1$ до последнего звена цепи. Далее, используя условие (4) и выражение (7), устанавливается новое значение вектора v_i и его уточненное значение v_i^{c+1} для следующего шага итерации на первом уровне $v_i^{c+1} = \Omega v_i + (I - \Omega) v_i^c$, где c — номер итерации, Ω — релаксационная матрица.

Отметим, что при вышеуказанных условиях постановки задачи все замкнутые локальной обратной связью звенья устойчивы, в том числе и в важном частном случае $v_i = 0$. Это значение вектора координации можно принять за начальное.

3. Рассмотрим случай $v_i = 0$ более подробно. Вектор управления каждым (i -м) звеном при $v_i = 0$ фактически определяется независимо от всех остальных звеньев в виде задачи минимизации локальной функции цепи (2) при известных внешних воздействиях. Эти воздействия заданы уравнениями движения предшествующих локально-замкнутых звеньев. Уточним сказанное на примере бесконечной цепи $N = 1, 2, \dots$ звеньев одинаковой размерности, в которой i -е звено связано со всеми предшествующими звеньями согласно уравнению (1).

Первая подсистема не связана, ее движение $\dot{x}_1 = A_1 x_1$ определяется

уравнениями (1), (10) и алгебраическим вариантом уравнения Риккати (8). Оптимальное управление второй подсистемой, состоящей из первых двух звеньев, должно уже удовлетворять расширенному уравнению

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_1 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ B_2 \end{vmatrix} u_2 \quad (11)$$

и минимизировать критерий (2) для $i=2$.

Закон оптимального управления определяется, учитывая вид матрицы \bar{B}_2 в (11), только элементами нижней блочной строки $2n \times 2n$ матрицы \bar{K}_2 — решения алгебраического уравнения Риккати для задачи (2), (11). Нижняя строка этого уравнения образует систему, которая решается последовательно относительно элементов K_{22} и K_{21} и в общем случае i -го звена — последовательно для элементов K_{ii} , $K_{i,i-1}, \dots, K_{i,1}$.

Оптимальное управление i -м звеном цепи принимает вид

$$u_i = -R_i^{-1} B_i' \sum_{j=1}^i K_{ij} x_j, \quad (12)$$

где K_{ii} определяется алгебраическим уравнением Риккати i -го звена, а матрицы K_{ij} вычисляются последовательно по индексу $j=i-1, \dots, 1$, из уравнения

$$K_{ij} \bar{A}_j + \bar{A}_i' K_{ij} = -K_{ii} B_j A_{ij} - \sum_{k=j+1}^{i-1} K_{ik} \bar{A}_{kj}, \quad (13)$$

где $\bar{A}_i = (A_i - B_i R_i^{-1} B_i' K_{ii})$ и $\bar{A}_{kj} = (A_{kj} - R_h^{-1} B_h' K_{hj})$. Матрицы \bar{A}_j, \bar{A}_{hj} известны — они найдены при оптимизации предшествующих звеньев. Решение уравнения (13) существует, поскольку все $\bar{A}_j, j=1, 2, \dots, i$ есть матрицы устойчивых подсистем.

Отметим, что в цепи звеньев с локальными регуляторами реализуется равновесное состояние по Нэш, поскольку закон управления i -м звеном (12) оптимален при любых значениях вектора состояния остальных звеньев.

Как следствие, качество управления, характеризуемого суммой минимальных значений локальных критериев (2), не лучше, чем в случае использования закона управления (10).

Управление цепью динамических подсистем по предложенному алгоритму реализуется в режиме реального времени. Ограничения по взаимосвязям не нарушаются при итерациях минимизации функции цели, что позволяет использовать названный алгоритм для улучшения качества функционирования технологических аппаратов, управляемых по закону (12) [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ульм С. Ю. Методы декомпозиции для решения оптимизации. Таллин, «Валгус», 1979.
2. Миркин Б. М. Автоматиз. проектир. АУ ТП. Фрунзе, 1986, 45—53.
3. Рандвез И. Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 30, № 1, 35—46 (1981).
4. Рандвез И. В кн.: Математическое моделирование сложных химико-технологических систем. Докл. III всес. конф., ч. 2. Таллин, 1982, 109.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
5/V 1987