EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1988, 37, 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1988.2.08

УДК 517.988

Р. ЛЕПП

УСЛОВИЯ ДИСКРЕТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПРОСТРАНСТВА СУЩЕСТВЕННО ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

(Представил Г. Вайникко)

1. Постановка задачи. Пусть m — конечная регулярная борелевская мера с носителем $S\subset R^l$, определенная на сигма-алгебре Σ борелевских множеств из S. Рассмотрим пространство функций $L^\infty(S, \Sigma, m)$, состоящее из m-измеримых существенно ограниченных на S функций $y(s)$ с нормой

$$\|y\| = \operatorname*{vraisup}_{s\in S} |y(s)|,$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма вектора.

При дискретной аппроксимации экстремальных задач и операторных уравнений возникает вопрос: какие условия гарантируют сходимость (см. [1])

$$\|p_n y\|_n \to \|y\|, \quad n\to\infty \quad \forall y \in L^\infty(m), \tag{1}$$

где p_n — кусочно-интегральный связывающий оператор между пространствами $L^\infty(S, \Sigma, m)$ и пространством векторов b_n с топологией max-нормы

$$\|y_n\|_n = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |y_{in}|, \quad y_n\in b_n$$

(требование (1) гарантирует единственность предела любой дискретно сходящейся последовательности элементов).

Пусть имеется сходящийся квадратурный процесс:

$$\sum_{i=1}^{n} h(s_{in}) m_{in} \to \int h(s) m(ds), \quad n\to\infty, \tag{2}$$

для любой непрерывной на S функции $h(s)$, где s_{in}, $i=1, \ldots, n$, некоторые точки из S.

Введем между пространствами $L^\infty(m)$ и b_n связывающий их оператор p_n в следующем виде:

$$(p_n y)_{in} = m(A_{in})^{-1} \int_{A_{in}} y(s) m(ds), \quad i=1, \ldots, n, \quad \forall y\in L^\infty(m), \tag{3}$$

где множества $A_{in}\in\Sigma$, $i=1, \ldots, n$, удовлетворяют следующим условиям:

1) $m(A_{in})>0$; 2) $\bigcup_{i=1}^{n} A_{in} = S$; 3) $A_{in}\cap A_{jn} = \varnothing$, $i\neq j$;

4) $s_{in}\in A_{in}$; 5) $\operatorname{diam} A_{in}\to 0$, $n\to\infty$;

6) $\max_{1\leqslant i\leqslant n} |m_{in} m(A_{in})^{-1} - 1| \to 0$, $n\to\infty$;

7) $m(A^0_{in}) = m(A_{in}) = m(\bar{A}_{in})$

(здесь $\operatorname{diam} A = \sup_{s,t\in A} |s-t|$, а через A^0 и $\bar{A}$ обозначены соответственно внутренность и замыкание множества A).

В следующем пункте приведём достаточные условия, гарантирующие сходимость (1) в пространстве существенно ограниченных функций.

2. Достаточные условия аппроксимации. Предположим, что мера m удовлетворяет ограничению A1):

A1) $m\{s \mid |s-s_0|=\mathrm{const}\}=0 \quad \forall s_0\in S$

(например, если m вероятностная мера с плотностью, то ограничение A1) выполнено).

Введем кроме нормы $\|y\|$ элемента y из L^∞ еще и ее L^p-норму

$$\|y\|_p=\left(\int |y(s)|^p m(ds)\right)^{1/p}$$

и следующие нормы векторов:

$$\|p_ny\|_n=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|(p_ny)_{in}|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|m(A_{in})^{-1}\int_{A_{in}} y(s)m(ds)\right|,$$

$$|p_ny|_{n,p}=\left(\sum_{i=1}^n \left|m(A_{in})^{-1}\int_{A_{in}} y(s)m(ds)\right|^p m_{in}\right)^{1/p}.$$

Предложение. *Пусть имеется система связывающих операторов* $\{p_n\}$ *в виде* (3) *со свойствами* 1)—7). *Пусть носитель S меры m ограниченное замкнутое множество и пусть выполнено условие* A1). *Тогда, если квадратурный процесс* (2) *сходится, то*

$$\|p_ny\|_n\to\|y\|,\quad n\to\infty\quad \forall y\in L^\infty(m).$$

Доказательство. Идея доказательства заключается в следующем: исходим из известных сходимостей

1. $\|y\|_p\to\|y\|,\quad p\to\infty\quad \forall y\in L^\infty(m)$

(см., напр., [2], § 14.11) и

2. $\|p_ny\|_{n,p}\to\|y\|_p,\quad n\to\infty\quad \forall p\in[1,\infty)$

(эта сходимость эквивалентна двум следующим условиям:

2а. $\|p_n\|_n\leqslant\mathrm{const}$,

2б. $\|p_n\|_{n,p}\to\|y\|_p$ для любого y из пространства непрерывных функций $C(S)$, где $C(S)$ всюду плотно в $L^p(m)$, $1\leqslant p<\infty$).

Для доказательства сходимости (1) исходим из неравенства

$$\begin{aligned}\big|\,\|y\|-\|p_ny\|_n\big| &\leqslant \big|\,\|y\|-\|y\|_p\big|+\\ &+\big|\,\|y\|_p-\|p_ny\|_{n,p}\big|+\big|\,\|p_ny\|_{n,p}-\|p_ny\|_n\big|.\end{aligned}\tag{4}$$

Для любого малого $\varepsilon>0$ можем выбирать

1. число $\bar p_1$ такое, что при $p_1\geqslant\bar p_1$ имеем

$$\big|\,\|y\|-\|y\|_{p_1}\big|\leqslant\varepsilon/3,$$

2. индекс $n_1=n_1(p_1)$ такой, что при n_1 имеем

$$\big|\,\|y\|_{p_1}-\|p_ny\|_{n_1,p_1}\big|\leqslant\varepsilon/3.$$

Рассмотрим третье слагаемое из суммы (4). Покажем, что существуют (независимые) p_2 и n_2 такие, что при $p\geqslant p_2$, $n\geqslant n_2$ имеем

$$\big|\,\|p_ny\|_{n,p}-\|p_ny\|_n\big|\leqslant\varepsilon/3\quad \forall y\in L^\infty(S,\Sigma,m).$$

Для любого $n=1,2,\ldots$ и $p\in[1,\infty)$ имеем

$$\left(\sum_{i=1}^n|(p_ny)_{in}|^p m_{in}\right)^{1/p}\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}|(p_ny)_{in}|\left(\sum_{i=1}^n m_{in}\right)^{1/p}.$$

Так как при $n\geqslant n_3$ имеем $\left(\sum_{i=1}^n m_{in}\right)^{1/p}\leqslant C^{1/p}\to 1$ при $p\to\infty$, то при $p_3\in[1,\infty)$ имеем $\left(\sum_{i=1}^n|(p_ny)_{in}|^{p_3}m_{in}\right)^{1/p_3}\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}|(p_ny)_{in}|+\varepsilon/3.$

Докажем обратное неравенство. Объясним идею доказательства. Исходим из того, что для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $D \in \Sigma$ с положительной мерой, $m(D) > 0$, такое, что $|y(s)| \geqslant \|y\| - \varepsilon/6$. Тогда и

$$|y(s)|^p \geqslant (\|y\| - \varepsilon/6)^p \quad \forall s \in D$$

для любого $p \in [1, \infty)$. Введя характеристическую функцию множества

$$\chi_D(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } s \in D, \\ 0, & \text{если } s \notin D, \end{cases}$$

имеем теперь уже для любого $s \in S$

$$\chi_D(s)\,|y(s)|^p \geqslant (\|y\| - \varepsilon/6)^p \chi_D(s) \quad \forall s \in S. \tag{5}$$

Функцию $\psi(s) \overset{\triangle}{=} \chi_D(s)\,|y(s)|^p$ мы можем (как элемент пространства $L^1(S, \Sigma, m)$) аппроксимировать непрерывной функцией вида $\varphi(s) \overset{\triangle}{=} z(s)\,|y_c(s)|^p$. Для последней в свою очередь можем использовать эквивалентную (см. [1], с. 14) системе $\{p_n\}$ систему связывающих операторов $\{p'_n\}$ в виде $(p'_n\varphi)_{in} = \varphi(s_{in})$, где s_{in}, $i = 1, \ldots, n$, точки из (2). Но $(p'_n\varphi)_{in} = (p'_n z)_{in} (p'_n |y_c|^p)_{in}$. А последнее дает нам возможность оценить разность

$$\sum_{i=1}^{n} |(p_n(\chi_D|y|^p))_{in} - (p'_n z)_{in}\,|(p_n y_c)_{in}|^p|\, m_{in}.$$

После этих вводных замечаний приступим к доказательству неравенства: существуют (независимые) p_4 и n_4 такие, что при $p \geqslant p_4$ и $n \geqslant n_4$ имеем

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |(p_n y)_{in}|^p m_{in}\right)^{1/p} \geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |(p_n y)_{in}| - \varepsilon/3.$$

Из неравенства (5) получим, что и

$$(p_n(\chi_D|y|^p))_{in} \geqslant (\|y\| - \varepsilon/6)^p (p_n\chi_D)_{in} \geqslant (\|p_n y\|_n - \varepsilon/6)^p (p_n\chi_D)_{in},$$
$$i = 1, \ldots, n, \quad \text{и}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (p_n(\chi_D|y|^p))_{in} m_{in} \geqslant (\|p_n y\|_n - \varepsilon/6)^p \sum_{i=1}^{n} (p_n\chi_D)_{in} m_{in}.$$

Ясно, что $\sum_{i=1}^{n} (p_n\chi_D)_{in} m_{in} \to m(D)$ при $n \to \infty$ (сходимость $\|p_n y\|_{n,1} \to \|y\|_1$).

Возьмем n_5 настолько большим, что

$$^1/_2 m(D) \leqslant \sum_{i=1}^{n} (p_n\chi_D)_{in} m_{in} \leqslant 2m(D) \quad \text{при} \quad n \geqslant n_5.$$

Тогда и

$$(^1/_2 m(D))^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (p_n\chi_D)_{in} m_{in}\right)^{1/p} \leqslant (2m(D))^{1/p}. \tag{6}$$

Возьмем теперь p_4 настолько большим, что

$$(^1/_2 m(D))^{1/p} \geqslant 1 - \varepsilon/15 \quad \text{при} \quad p \geqslant p_4. \tag{7}$$

Аппроксимируем функцию $\psi(s) = \chi_D(s)\,|y(s)|^p$ (как функцию из $L^1(S, \Sigma, m)$) непрерывной функцией $\varphi(s)$ вида $\varphi(s) = z(s)\,|y_c(s)|^p$, где $y_c(\cdot) \in C(S)$, $z(\cdot) \in C(S)$, $0 \leqslant z(s) \leqslant 1$, $s \in S$, и

$$\int ||y(s)|^p - |y_c(s)|^p|\, m(ds) \leqslant \varepsilon/60,$$
$$\int |\chi_D(s) - z(s)|\, m(ds) \leqslant \varepsilon/(60 \sup_{s \in S} |y_c(s)|^p).$$

Тогда $$\int |\chi_D(s)|y(s)|^p - z(s)|y_c(s)|^p|m(ds) \leqslant$$
$$\leqslant \int |\chi_D(s)[|y(s)|^p - |y_c(s)|^p]|m(ds) +$$
$$+ \int ||y_c(s)|^p[\chi_D(s) - z(s)]|m(ds) \leqslant$$
$$\leqslant \int ||y(s)|^p - |y_c(s)|^p|m(ds) +$$
$$+ \sup_{s\in S} |y_c(s)|^p \int |\chi_D(s) - z(s)|m(ds) \leqslant 2\varepsilon/60.$$

Тогда при $n \geqslant n_6$ имеем

$$\left|\sum_{i=1}^{n} (p_n(\chi_D|y|^p))_{in} m_{in} - \sum_{i=1}^{n} (p_n(z|y_c|^p))_{in} m_{in}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{A_{in}} |\chi_D(s)|y(s)|^p - z(s)|y_c(s)|^p|m(ds) \frac{m_{in}}{m(A_{in})} \leqslant$$

$$\leqslant \int |\chi_D(s)|y(s)|^p - z(s)|y_c(s)|^p|m(ds) \leqslant 3\varepsilon/60.$$

Но для непрерывной функции $z(s)|y_c(s)|^p$ мы имеем право использовать и эквивалентную [1] системе $P = \{p_n\}$ систему связывающих операторов $P' = \{p'_n\}$ в виде

$$(p'_n(z|y_c|^p))_{in} = z(s_{in})|y_c(s_{in})|^p,$$

где s_{in}, $i = 1, \ldots, n$, точки из (2).
Следовательно, при $n \geqslant n_7$

$$\sum_{i=1}^{n} |(p_n(z|y_c|^p))_{in} - (p'_n(z|y_c|^p))_{in}|m_{in}| \leqslant \varepsilon/60$$

и при $n \geqslant \max\{n_6, n_7\}$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} |(p_n(\chi_D|y|^p))_{in} - (p'_n(z|y_c|^p))_{in}|m_{in} \leqslant 4\varepsilon/60.$$

Но для функции $z(s)|y_c(s)|^p$ справедливо

$$(p'_n(z|y_c|^p))_{in} = (p'_n z)_{in}|(p'_n y_c)_{in}|^p.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} |(p_n(z|y_c|^p))_{in} - (p'_n z)_{in}|(p'_n y_c)_{in}|^p|m_{in} \leqslant 4\varepsilon/60.$$

Возьмем теперь индекс n_8 настолько большим, что при $n \geqslant n_8$

$$\sum_{i=1}^{n} |(p_n z)_{in}|(p_n y_c)_{in}|^p - (p'_n z)_{in}|(p'_n y_c)_{in}|^p|m_{in} \leqslant \varepsilon/60.$$

Следовательно, существует индекс $n_9 = \max\{n_6, n_7, n_8\}$ такой, что

$$\sum_{i=1}^{n} |(p_n(\chi_D|y|^p))_{in} - (p'_n z)_{in}|(p_n y_c)_{in}|^p|m_{in} \leqslant 5\varepsilon/60.$$

Тогда при $n \geqslant n_9$

$$\sum_{i=1}^{n} (p'_n z)_{in}|(p_n y_c)_{in}|^p m_{in} \geqslant$$

$$\geqslant (\|p_n y\|_n - \varepsilon/6) \sum_{i=1}^{n} (p_n \chi_D)_{in} m_{in} - 5\varepsilon/60.$$

Тем более (так как $0 \leqslant (p'_n z)_{in} \leqslant 1$, $i=1, \ldots, n$)

$$\sum_{i=1}^{n} |(p_n y_c)_{in}|^p m_{in} \geqslant (\|p_n y\|_n - \varepsilon/6)^p \sum_{i=1}^{n} (p_n \chi_D)_{in} m_{in} - 5\varepsilon/60.$$

Взяв индекс n_{10} таким, что при $n \geqslant n_{10}$ имеем

$$\left| \sum_{i=1}^{n} [|(p_n y_c)_{in}|^p - |(p_n y)_{in}|^p] m_{in} \right| \leqslant \varepsilon/60,$$

получим, что при $n \geqslant n_{11} = \max\{n_6, \ldots, n_{10}\}$

$$\sum_{i=1}^{n} |(p_n y)_{in}|^p m_{in} \geqslant (\|p_n y\|_n - \varepsilon/6)^p \sum_{i=1}^{n} (p_n \chi_D)_{in} m_{in} - 6\varepsilon/60.$$

Теперь из (6) и (7) получим, что при $n \geqslant \max\{n_5, n_{11}\}$ и $p \geqslant p_4$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |(p_n y)_{in}|^p m_{in} \right)^{1/p} \geqslant (\|p_n y\|_n - \varepsilon/6) - \varepsilon/15 - \varepsilon/10 = \|p_n y\|_n - \varepsilon/3.$$

Возьмем в качестве n_4 теперь $n_4 = \max\{n_5, n_{11}\}$.

Взяв $p_2 \in \max\{p_3, p_4\}$, $n_2 = \max\{n_3, n_4\}$, получим, что при $p \geqslant p_2$ и $n \geqslant n_2$

$$| \|p_n y\|_{n,p} - \|p_n y\|_n | \leqslant \varepsilon/3.$$

Тогда при $n \geqslant \max\{n_1(p_1), n_2\}$

$$| \|y\| - \|p_n y\|_n | \leqslant \varepsilon.$$

Предложение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вайникко Г.* Анализ дискретизационных методов. Тарту, Изд-во Тартуск. ун-та, 1976.
2. *Köthe, G.* Topological Vector Spaces. I. Berlin—Heidelberg—New York, Springer Verlag, 1983.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
5/V1987

R. LEPP

OLULISELT TÕKESTATUD FUNKTSIOONIDE RUUMI DISKREETSE LÄHENDAMISE TINGIMUSED

On defineeritud oluliselt tõkestatud funktsioonide ruumi ja lõplikumõõtmeliste vektorite ruumi ühendav, tükati integraalne lineaarne sideoperaator. On esitatud piisavad tingimused, et oluliselt tõkestatud funktsioonide ruum oleks lähendatav lõplikumõõtmeliste vektorite ruumi kasvava jadaga.

R. LEPP

DISCRETE APPROXIMATION CONDITIONS FOR THE SPACE OF ESSENTIALLY BOUNDED FUNCTIONS

A linear piecewise integral connection operator between the space of essentially bounded functions and the space of finite-dimensional vectors is defined. Sufficient conditions that guarantee approximation of the space of essentially bounded functions by the increasing sequence of finite-dimensional spaces are presented.