EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1988, 37, 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1988.2.07

УДК 517.968.21

П. УБА

ГЛАДКОСТЬ РЕШЕНИЯ СЛАБО-СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

(Представил Г. Вайникко)

Рассматривается линейное интегральное уравнение второго рода

$$u(t)=\int_0^b a(t,s)\varkappa(t-s)u(s)\,ds+f(t), \qquad 0\leqslant t\leqslant b, \tag{1}$$

в котором $\varkappa\in C^{m-1}([-b,b]\setminus\{0\})$, $m\geqslant 1$, причем при $-b\leqslant t<0$ и $0<t\leqslant b$ справедлива оценка

$$|\varkappa^{(m-1)}(t)|\leqslant c|t|^{-\beta}, \quad 0<\beta<m, \tag{2}$$

где β — дробное число.

В [1–7] показано, что если $f\in C^m[0,b]$ и $a(t,s)\equiv 1$, то особенность функции $\varkappa^{(k)}(t)$ влечет за собой особенности такого же порядка $(k+1)$-го производного решения в обоих концах отрезка интегрирования, а внутри промежутка $(0,b)$ решение m раз непрерывно дифференцируемо. В случае достаточно гладкого по обоим переменным коэффициента $a(t,s)$ как это видно из [8–9], характер особенностей производных решения останется таким же.

В настоящей работе изучается случай негладкого по параметру s коэффициента $a(t,s)$. Отметим, что краткий исторический очерк и библиографические замечания к решению слабо-сингулярных интегральных уравнений даны в [9].

1. Предположим, что $a(t,s)$ m раз непрерывно дифференцируема на $[0,b]\times[0,d]$ и $[0,b]\times[d,b]$ и целое $p\,(0\leqslant p<\beta)$ — наименьшее, при котором $\dfrac{\partial^p}{\partial s^p}a(t,s)$ имеет при $s=d$ $(0<d<b)$ разрыв первого рода. Введем класс функций

$$E^\beta=\left\{u\in C[0,b]\cap C^p(0,b)\cap C^m((0,b)\setminus\{d\}):\right.$$

$$\left.\sup_{\substack{0<t<b\\ t\neq d}}\frac{|u^{(m)}(t)|}{t^{-\beta}+|t-d|^{-\beta+p}+(b-t)^{-\beta}}<\infty\right\}.$$

Снабженное нормой

$$\|u\|_{E^\beta}=\|u\|_C+\sup_{\substack{0<t<b\\ t\neq d}}\frac{|u^{(m)}(t)|}{t^{-\beta}+|t-d|^{-\beta+p}+(b-t)^{-\beta}},$$

класс E^β превращается в банахово пространство.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $f \in E^{\beta}$ *и пусть выполнены предположения о функциях* $\varkappa(t)$ *и* $a(t, s)$. *Если уравнение* (1) *имеет интегрируемое решение* u, *то* $u \in E^{\beta}$.

Теорема 2. *Пусть* $f \in C^m[0, b]$, *выполнены предположения о функциях* $\varkappa(t)$ *и* $a(t, s)$ *и, кроме того, в окрестности нуля справедливы оценки снизу*

$$|\varkappa^{(k)}(t)| \geqslant c_k |t|^{-\gamma+m-1-k}, \quad 0 < |t| \leqslant \delta, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{3}$$

где $c_k = \mathrm{const} > 0$, *а* γ *удовлетворяет неравенствам*

$$\beta - (m - \beta) < \gamma \leqslant \beta. \tag{4}$$

Тогда для тех $k = 1, \ldots, m$, *для которых* $\varkappa^{(k-1)}(t)$ *уже имеет при* $t = 0$ *особенность, имеют место представления*

$$u^{(k)}(t) = u(0)a(t, 0)\varkappa^{(k-1)}(t) - u(b)a(t, b)\varkappa^{(k-1)}(t-b) + v_k(t) + \\ + (-1)^p \binom{k-1}{p} u(d) \left[\frac{\partial^p}{\partial s^p} a(t, s) \Big|_{s=d+0} - \right. \\ \left. - \frac{\partial^p}{\partial s^p} a(t, s) \Big|_{s=d-0} \right] \varkappa^{(k-1-p)}(t-d), \tag{5}$$

где $v_k \in C^{m-k}((0, b) \setminus \{d\})$,
причем

$$\lim_{t \to 0+} \frac{v_k(t)}{\varkappa^{(k-1)}(t)} = 0, \quad \lim_{|t-d| \to 0} \frac{v_k(t)}{\varkappa^{(k-1-p)}(t-d)} = 0, \quad \lim_{t \to b-} \frac{v_k(t)}{\varkappa^{(k-1)}(t-b)} = 0. \tag{6}$$

В случае $k-1-p < 0$ последнее слагаемое в выражении (5) отсутствует.

Теорема 2 говорит о том, что $(p+l)$-я $(1 \leqslant l \leqslant m-p)$ производная решения уравнения (1) при $t \to d-$ и $t \to d+$ имеет такие же особенности, как функция $\varkappa^{(l-1)}(t)$ соответственно при $t \to 0-$ и $t \to 0+$. Доказательство этой теоремы построено в пункте 5.

Доказательство теоремы 1 основывается на следующем результате (см. [9], с. 10):

Пусть E и E_1 — банаховы пространства, причем E непрерывно и плотно вложено в E_1. Пусть $T: E \to E$ и $K: E_1 \to E_1$ — линейные вполне непрерывные операторы, причем $T \subset K$ является сужением оператора K на E. Если уравнение $u_1 + Ku_1 = f$ с $f \in E \subset E_1$ разрешимо в E_1, то его решения принадлежат E.

Положим $E = E^{\beta}$ и $E_1 = L_1 = L_1[0, b]$,

$$(Tu)(t) = \int_0^b a(t, s)\varkappa(t-s)u(s)\,ds, \quad u \in E^{\beta}$$

и

$$(Ku)(t) = \int_0^b a(t, s)\varkappa(t-s)u(s)\,ds, \quad u \in L_1.$$

Полная непрерывность оператора $K: L_1 \to L_1$ в условиях (2) очевидна, доказательство полной непрерывности оператора T в E^{β} вынесено в пунктах 2—4. Применение этого результата дает, что в случае $f \in E^{\beta}$ решение уравнения (1) принадлежит E^{β}.

2. Заметим, что из (2) вытекают неравенства

$$|\varkappa^{(k)}(t)| \leqslant c_k(|t|^{-\beta+m-1-k} + 1), \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{7}$$

которые в дальнейшем будут неоднократно использованы.

Введем следующие обозначения

$$a_0(t,s)=a(t,s)=\begin{cases} a_0^-(t,s), & 0\leqslant s\leqslant d,\\ a_0^+(t,s), & d\leqslant s\leqslant b,\end{cases}$$

$$a_i(t,s)=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\right)a_{i-1}(t,s)=\begin{cases} a_i^-(t,s), & 0\leqslant s\leqslant d,\\ a_i^+(t,s), & d\leqslant s\leqslant b,\end{cases}$$

и интегральные операторы

$$(T_iu)(t)=\int_0^b a_i(t,s)\varkappa(t-s)u(s)\,ds=\int_0^d a_i^-(t,s)\varkappa(t-s)u(s)\,ds+$$
$$+\int_d^b a_i^+(t,s)\varkappa(t-s)u(s)\,ds,\quad i=1,\ldots,m.$$

Ясно, что сопряженный к T_i оператор T_i^* выражается в виде

$$(T_i^*u)(s)=\int_0^b a_i(t,s)\varkappa(t-s)u(t)\,dt=\begin{cases}\int_0^b a_i^-(t,s)\varkappa(t-s)u(t)\,dt, & 0\leqslant s\leqslant d,\\ \int_0^b a_i^+(t,s)\varkappa(t-s)u(t)\,dt, & d\leqslant s\leqslant b.\end{cases}$$

Предложение 1. *Для $u\in E^\beta$ справедлива формула*

$$(Tu)'(t)=(Tu')(t)+(T_1u)(t)+u(0)a(t,0)\varkappa(t)-u(b)a(t,b)\varkappa(t-b)+$$
$$+u(d)\left[a_0^+(t,d)-a_0^-(t,d)\right]\varkappa(t-d). \tag{8}$$

Доказательство. Заменой $t-s=\sigma$ запишем Tu в виде

$$(Tu)(t)=-\int_t^{t-d} a_0^-(t,t-\sigma)\varkappa(\sigma)u(t-\sigma)\,d\sigma-$$
$$-\int_{t-d}^{t-b} a_0^+(t,t-\sigma)\varkappa(\sigma)u(t-\sigma)\,d\sigma.$$

Известное правило дифференцирования таких интегралов дает

$$(Tu)'(t)=-\int_t^{t-d}\left[a_1^-(t,t-\sigma)\varkappa(\sigma)u(t-\sigma)+\right.$$
$$\left.+a_0^-(t,t-\sigma)\varkappa(\sigma)u'(t-\sigma)\right]d\sigma-\left[a_0^-(t,t-\sigma)\varkappa(\sigma)u(t-\sigma)\right]_{\sigma=t}^{\sigma=t-d}-$$
$$-\left[a_0^+(t,t-\sigma)\varkappa(\sigma)u(t-\sigma)\right]_{\sigma=t-d}^{\sigma=t-b}-\int_{t-d}^{t-b}\left[a_1^+(t,t-\sigma)\varkappa(\sigma)u(t-\sigma)+\right.$$
$$\left.+a_0^+(t,t-\sigma)\varkappa(\sigma)u'(t-\sigma)\right]d\sigma.$$

Вернувшись в подынтегральных членах к переменной s, после несложных преобразований приходим к формуле (8).

Предложение 1 доказано.

В ходе рассуждений нам понадобится понятие обобщенных производных (см. напр., [10]). Обозначим через $\langle z,\varphi\rangle$ значение обобщенной функции z на бесконечно дифференцируемой финитной в $\Omega_d=\{(0,b)\setminus\{d\}\}$ функции φ (основные функции). Отметим, что если m-я обобщенная производная $D^m z\in C(0,b)$, то z дифференцируема и в классическом смысле, и обобщенная производная совпадает с классической: $D^{m}z=z^{(m)}$. Для основных функций φ справедливы следующие равенства (см. [9], с. 13):

$$T_0^* D^k\varphi=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}D^i T_{k-i}^*\varphi,\quad k=0,\ \dots,\ m. \tag{9}$$

При выводе формулы для высших производных от Tu будем предполагать, что $u\in E^\beta$ имеет особенности только в точке $d\in(0, b)$.

Предложение 2. *Пусть* $m\geqslant 2$,

$$u\in C^p[0, b]\cap C^m([0, b]\setminus\{d\}),\quad u^{(i)}(0)=u^{(i)}(b)=0,$$
$$i=0,\ 1,\ \dots,\ m,\quad |u^{(m)}(t)|\leqslant c(|t-d|^{-\beta+p}+1),\quad t\in\{[0, b]\setminus\{d\}\}, \tag{10}$$
$$0<\beta<m.$$

Тогда для $k=2, \dots, m$ *справедлива формула*

$$(D^kTu)(t)=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left\{\int_0^d g_{i,k}^-(t, s)u^{(i)}(s)ds+\int_d^b g_{i,k}^+(t, s)u^{(i)}(s)ds\right\}+$$
$$+(-1)^{k-1}u(d)\left\{\left[\frac{\partial^{k-1}}{\partial s^{k-1}}(a_0^+(t, s)\varkappa(t-s))\right]_{s=d}-\right.$$
$$\left.-\left[\frac{\partial^{k-1}}{\partial s^{k-1}}(a_0^-(t, s)\varkappa(t-s))\right]_{s=d}\right\}, \tag{11}$$

где

$$g_{0,k}^\pm(t, s)=a_k^\pm(t, s)\varkappa(t-s),$$
$$g_{i,k}^\pm(t, s)=a_{k-i}^\pm(t, s)\varkappa(t-s)-\sum_{j=0}^{i-1}\varkappa_{k-i,j}^\pm(t)\frac{(s-d)^j}{j!},$$
$$i=1,\ \dots,\ k-1,$$
$$g_{k,k}^\pm(t, s)=a_0^\pm(t, s)\varkappa(t-s)-\sum_{j=0}^{k-2}\varkappa_{0,j}^\pm(t)\frac{(s-d)^j}{j!}, \tag{12}$$

$$\varkappa_{i,j}^\pm(t)=\left[\frac{\partial^j(a_i^\pm(t, s)\varkappa(t-s))}{\partial s^j}\right]_{s=d},\quad t\neq d,\quad i+j\leqslant m.$$

Доказательство. Для любой основной функции φ в силу (9) имеем

$$\langle D^kTu, \varphi\rangle=(-1)^k\langle Tu, D^k\varphi\rangle=(-1)^k\langle u, T^*D^k\varphi\rangle=$$
$$=(-1)^k\int_0^b u(s)(T^*D^k\varphi)(s)ds=$$
$$=(-1)^k\int_0^b u(s)\left[\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}(D^iT_{k-i}^*\varphi)(s)\right]ds=\int_0^b u(s)(T_k^*\varphi)(s)ds+$$
$$+\sum_{i=1}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\int_0^d u(s)\frac{d^i}{ds^i}[(T_{k-i}^*\varphi)(s)-v_{i,k}^-(s)]ds+$$
$$+\sum_{i=1}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\int_d^b u(s)\frac{d^i}{ds^i}[(T_{k-i}^*\varphi)(s)-v_{i,k}^+(s)]ds,$$

где $v^{\pm}_{i,k}(s)$ — произвольные многочлены степени $i-1$. Мы их выбираем так:

$$v^{\pm}_{i,k}(s)=\sum_{j=0}^{i-1}\left[\frac{d^j}{ds^j}(T^*_{k-i}\varphi)(s)\right]_{s=d\pm}\cdot\frac{(s-d)^j}{j!},\quad i=1,\ldots,k-1,$$

$$v^{\pm}_{k,k}(s)=\sum_{j=0}^{k-2}\left[\frac{d^j}{ds^j}(T^*_0\varphi)(s)\right]_{s=d\pm}\cdot\frac{(s-d)^j}{j!}.$$

Тогда для $i=1, 2, \ldots, k-1$ функции $(T^*_{k-i}\varphi)(s)-v^{\pm}_{i,k}(s)$ и их производные до порядка $i-1$ включительно обращаются в точке $s=d$ в нуль; при $i=k$ аннулируются производные до порядка $k-2$. Учитывая (10), интегрированием по частям находим

$$\langle D^kTu,\varphi\rangle=\int_0^b u(s)(T^*_k\varphi)(s)ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\int_0^d u^{(i)}(s)[(T^*_{k-1}\varphi)(s)-v^-_{i,k}(s)]ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\int_d^b u^{(i)}(s)[(T^*_{k-i}\varphi)(s)-v^+_{i,k}(s)]ds+$$

$$+(-1)^k\left\{u(s)\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}[(T^*_0\varphi)(s)]\right\}_{s=0}^{s=d-}+$$

$$+(-1)^k\left\{u(s)\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}[(T^*_0\varphi)(s)]\right\}_{s=d+}^{s=b},$$

остальные внеинтегральные члены аннулируются. В интегралах

$$(T^*_i\varphi)(s)=\begin{cases}\int_0^b a^-_i(t,s)\varkappa(t-s)\varphi(t)dt, & 0\leqslant s\leqslant d,\\ \int_0^b a^+_i(t,s)\varkappa(t-s)\varphi(t)dt, & d\leqslant s\leqslant b\end{cases}$$

интегрирование в действительности происходит по носителю $\operatorname{supp}\varphi\subset\Omega_d$ и при $s=d$ аргумент $t-s$ функции $\varkappa(t-s)$ отделен от нуля. Это позволяет вычислять производные при $s=d$ дифференцированием под знаком интеграла:

$$\frac{d^j}{ds^j}(T^*_i\varphi)(s)\Big|_{s=d\pm}=\int_0^b\left[\frac{\partial^j}{\partial s^j}(a^{\pm}_i(t,s)\varkappa(t-s))\right]_{s=d}\varphi(t)dt=$$

$$=\int_0^b\varkappa^{\pm}_{i,j}(t)\varphi(t)dt.$$

Проделав соответствующие подстановки, имеем

$$\langle D^kTu,\varphi\rangle=\int_0^d u(s)\int_0^b a^-_k(t,s)\varkappa(t-s)\varphi(t)dt\,ds+$$

$$+\int\limits_d^b u(s)\int\limits_0^b a_k^+(t,s)\varkappa(t-s)\varphi(t)\,dt\,ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}\int\limits_0^d u^{(i)}(s)\left\{\int\limits_0^b a_{k-i}^-(t,s)\varkappa(t-s)\varphi(t)\,dt-\right.$$

$$\left.-\sum_{j=0}^{i-1}\int\limits_0^b \varkappa_{i,j}^-(t)\varphi(t)\,dt\,\frac{(s-d)^j}{j!}\right\}ds+$$

$$+\int\limits_0^d u^{(k)}(s)\left\{\int\limits_0^b\left[a_0^-(t,s)\varkappa(t-s)-\sum_{j=0}^{k-2}\varkappa_{0,j}^-(t)\,\frac{(s-d)^j}{j!}\right]\varphi(t)\,dt\right\}ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}\int\limits_d^b u^{(i)}(s)\left\{\int\limits_0^b a_{k-i}^+(t,s)\varkappa(t-s)\varphi(t)\,dt-\right.$$

$$\left.-\sum_{j=0}^{i-1}\int\limits_0^b \varkappa_{i,j}^+(t)\varphi(t)\,dt\,\frac{(s-d)^j}{j!}\right\}ds+$$

$$+\int\limits_d^b u^{(k)}(s)\left\{\int\limits_0^b\left[a_0^+(t,s)\varkappa(t-s)-\sum_{j=0}^{k-2}\varkappa_{0,j}^+(t)\,\frac{(s-d)^j}{j!}\right]\varphi(t)\,dt\right\}ds+$$

$$+(-1)^k u(d)\int\limits_0^b[\varkappa_{0,k-1}^-(t)-\varkappa_{0,k-1}^+(t)]\varphi(t)\,dt.$$

В обозначениях (12) это можно записать в виде

$$\langle D^kTu,\varphi\rangle=(-1)^k u(d)\int\limits_0^b[\varkappa_{0,k-1}^-(t)-\varkappa_{0,k-1}^+(t)]\varphi(t)\,dt+$$

$$+\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\int\limits_0^d\left\{\int\limits_0^b g_{i,k}^-(t,s)\varphi(t)\,dt\right\}u^{(i)}(s)\,ds+$$

$$+\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\int\limits_d^b\left\{\int\limits_0^b g_{i,k}^+(t,s)\varphi(t)\,dt\right\}u^{(i)}(s)\,ds. \qquad (13)$$

Установим правомерность изменения в последних интегралах порядка интегрирования. Достаточно показать, что сходятся двойные интегралы

$$\int\limits_0^b\int\limits_0^d|u^{(i)}(s)|\,|g_{i,k}^-(t,s)|\,|\varphi(t)|\,ds\,dt \quad \text{и} \quad \int\limits_0^b\int\limits_d^b|u^{(i)}(s)|\,|g_{i,k}^+(t,s)|\,|\varphi(t)|\,ds\,dt$$

или любой из соответствующих повторных интегралов. Из (10) следуют оценки

$$|u^{(i)}(s)|\leqslant c_i(|s-d|^{-\beta+m-i+p}+1),\quad i=0,\,1\,\ldots,\,m, \qquad (14)$$

а из (2) и (7), что

$$|g^{\pm}_{i,0}(t,s)|\leqslant c|t-s|^{-\beta+m-1}$$

$$|g^{\pm}_{i,k}(t,s)|\leqslant c\Big(|t-s|^{-\beta+m-1}+\sum_{j=0}^{i-1}(|t-d|^{-\beta+m-j-1}+1)(s-d)^j\Big),$$

$$i=1,\ \ldots,\ k-1, \quad (15)$$

$$|g^{\pm}_{k,k}(t,s)\leqslant c\Big(|t-s|^{-\beta+m-1}+\sum_{j=0}^{k-2}(|t-d|^{-\beta+m-j-1}+1)(s-d)^j\Big).$$

Но эти оценки слишком грубы около $s=d$. Трактуя $g^{\pm}_{i,k}(t,s)$ как остаточные члены формулы Тейлора для функций $a^{\pm}_{k-i}(t,s)\varkappa(t-s)$, можем оценить

$$|g^{-}_{i,k}(t,s)|\leqslant \max_{s\leqslant\rho\leqslant d}\frac{\partial^i}{\partial\varrho^i}[a^{-}_{k-i}(t,\varrho)\varkappa(t-\varrho)]\frac{(s-d)^i}{i!},$$

$$|g^{+}_{i,k}(t,s)|\leqslant \max_{d\leqslant\rho\leqslant s}\frac{\partial^i}{\partial\varrho^i}[a^{+}_{k-i}(t,\varrho)\varkappa(t-\varrho)]\frac{(s-d)^i}{i!},$$

откуда для близких к d переменных s $(|s-d|\leqslant|t-d|/2)$ получаем

$$|g^{\pm}_{i,k}(t,s)|\leqslant c(|t-d|^{-\beta+m-1-i}+1)(s-d)^i,\quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1, \quad (16)$$

$$|g^{\pm}_{k,k}(t,s)|\leqslant c(|t-d|^{-\beta+m-k}+1)(s-d)^k. \quad (17)$$

В интеграле

$$\int_0^d|u^{(i)}(s)|\,|g^{-}_{i,k}(t,s)|\,ds\leqslant c_i\Big(\int_0^{\frac{t+d}{2}}+\int_{\frac{t+d}{2}}^d\Big)\times$$

$$\times(|g^{-}_{i,k}(t,s)|\,(|s-d|^{-\beta+m-i+p}+1)\,ds),\quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ k$$

для $(t+d)/2\leqslant s\leqslant d$ воспользуемся оценкой (16) или (17), а для $0<s<(t+d)/2$ оценкой (15). Аналогично поступаем с интегралом

$$\int_d^b|u^{(i)}(s)|\,|g^{+}_{i,k}(t,s)|\,ds.$$

Несложный подсчет показывает, что

$$\int_0^d|u^{(i)}(s)|\,|g^{-}_{i,k}(t,s)|\,ds\leqslant c(|t-d|^{2(m-\beta)-i+p}+1),$$

$$\int_d^b|u^{(i)}(s)|\,|g^{+}_{i,k}(t,s)|\,ds\leqslant c(|t-d|^{2(m-\beta)-i+p}+1).$$

Теперь, учитывая финитность функции φ, заключаем, что повторные интегралы

$$\int_0^b\Big\{\int_0^d|u^{(i)}(s)|\,|g^{-}_{i,k}(t,s)|\,ds\Big\}\varphi(t)\,dt \quad \text{и} \quad \int_0^b\Big\{\int_d^b|u^{(i)}(s)|\,|g^{+}_{i,k}(t,s)|\,ds\Big\}\varphi(t)\,dt$$

сходятся.

Поменяв порядок интегрирования в (13), имеем

$$\langle D^k Tu, \varphi\rangle = (-1)^{k-1} u(d) \int_0^b [\varkappa^+_{0,k-1}(t) - \varkappa^-_{0,k-1}(t)]\varphi(t)\,dt +$$

$$+\int_0^b \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left\{ \int_0^d g^-_{ik}(t,s)\, u^{(i)}(s)\,ds + \int_d^b g^+_{i,k}(t,s)\, u^{(i)}(s)\,ds \right\} \varphi(t)\,dt$$

откуда, ввиду произвольности φ, вытекает утверждение предложения 2.

Из проведенных оценок следует также сходимость интегралов в (11) и неравенство

$$|(D^k Tu)(t) - (-1)^{k-1} u(d) [\varkappa^+_{0,k-1}(t) - \varkappa^-_{0,k-1}(t)]| \leqslant$$
$$\leqslant c(|t-d|^{2(m-\beta)-k+p} + 1), \quad 2 \leqslant k \leqslant m. \tag{18}$$

Функции $g^{\pm}_{i,k}(t,s)$ непрерывны при $t \neq s$, $t \neq d$, а особенность при $t = s$ — суммируемая. Легко видно, что интегралы в (11) представляют собой непрерывные при $t \neq d$ функции. Таким образом, производные $D^k Tu$ в (11) в действительности классические.

3. Обозначим через $E_d{}^\beta$ подпространство банахова пространства E^β, состоящего из удовлетворяющих условиям (10) функций.

Предложение 3. *Оператор T переводит $E_d{}^\beta$ в E^β и вполне непрерывен между этими пространствами.*

Доказательство. Известно, что слабо-сингулярный интегральный оператор действует и вполне непрерывен в $C[0, b]$. В предложении 2 установлено, что для $u \in E_d{}^\beta$ существует производная $\frac{d^m}{dt^m}(Tu)(t)$ в $(0, d)$ и в (d, b). В силу (18)

$$\left|\frac{d^m}{dt^m}(Tu)(t) - (-1)^{m-1} u(d) [\varkappa^+_{0,m-1}(t) - \varkappa^-_{0,m-1}(t)]\right| \leqslant$$
$$\leqslant c(|t-d|^{(m-\beta)-\beta+p} + 1),$$

а в силу (7), (12) и предположения о гладкости функции $a(t, s)$

$$|\varkappa^+_{0,m-1}(t) - \varkappa^-_{0,m-1}(t)| = \left| \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} \left\{ \frac{\partial^i}{\partial s^i} a^+(t,s)\Big|_{s=d} \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \frac{\partial^{m-1-i}}{ds^{m-1-i}} \varkappa(t-s)\Big|_{s=d} - \frac{\partial^i}{\partial s^i} a^-(t,s)\Big|_{s=d} \times \frac{\partial^{m-1-1}}{\partial s^{m-1-i}} \varkappa(t-s)\Big|_{s=d} \right\} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \sum_{i=p}^{m-1} c \frac{\partial^{m-1-i}}{\partial s^{m-1-i}} \varkappa(t-s)\Big|_{s=d} \right| \leqslant c_1(|t-d|^{-\beta+p} + 1). \tag{19}$$

Значит, T переводит $E_d{}^\beta$ в E^β.

Докажем полную непрерывность $T: E_d{}^\beta \to E^\beta$. Пусть $\{u_n\}$ — ограниченная в $E_d{}^\beta$ последовательность. Это равносильно неравенствам (14) для u_n с независящими от n постоянными c_i. Для доказательства компактности $\{Tu_n\}$ в E^β, нам удобно установить компактность последовательности $\{Tu_n + z_n\}$ в E^β, где $\{z_n\}$ с

$$z_n(t) = (-1)^m u_n(d) \underbrace{\int_0^t dt \ldots \int_0^t}_{m \text{ интегрирований}} [\varkappa^+_{0,m-1}(t) - \varkappa^-_{0,m-1}(t)]\,dt$$

— компактная последовательность в E^β. Отметим, что $z^{(m)}_n(t) = (-1)^m u_n(d) [\varkappa^+_{0,m-1}(t) - \varkappa^-_{0,m-1}(t)]$. Для установления компактности некой последовательности $\{y_n\}$ в E^β достаточно показать, что последовательности $\{y_n\}$ и $\{[t^\beta+|t-d|^{\beta-p}+(b-t)^\beta]y_n^{(m)}(t)\}$ компактны в $C[0, b]$. Поскольку последовательность $\{Tu_n+z_n\}$ компактна в $C[0, b]$, то дело сводится к доказательству компактности последовательности $\left\{|t-d|^{\beta-p}\frac{d^m}{dt^m}(Tu_n+z_n)\right\}$ в $C[0, b]$. (Учитывая (18) и (19), видно, что в оценках для $\frac{d^m}{dt^m}(Tu_n+z_n)$ доминирует только величина $|t-d|$ и мы можем t^β и $(b-t)^\beta$ опустить.) Последнее, в свою очередь, можно с учетом (11) свести к установлению полной непрерывности интегральных операторов $G_i^-: L_\infty[0, d]\to C[0, d]$ и $G_i^+: L_\infty[d, b]\to C[d, b]$, где

$$(G_i^- v)(t)=\int_0^d G_i^-(t, s)v(s)ds \quad \text{и} \quad (G_i^+ v)(t)=\int_d^b G_i^+(t, s)v(s)ds,$$

$$G_i^\pm(t, s)=|t-d|^{\beta-p}g_{i,m}^\pm(t, s)(|s-d|^{-\beta+p+m-i}+1), \quad i=0, 1, \ldots, m.$$

Ядра $G_i^\pm(t, s)$ имеют особенности при $s=d$ и $s=t$. Из оценок (15), (16) и (17) вытекает, что

$$|G_i^\pm(t, s)|\leqslant$$

$$\leqslant c\begin{cases}(|s-d|^{-\beta+m-1}+|t-s|^{-\beta+m-1}+1) & \text{при} \quad |s-d|\leqslant|t-d|/2,\\ (|t-s|^{-\beta+m-1}+1 & \text{при} \quad |s-d|>|t-d|/2,\end{cases}$$

$i=0, 1, \ldots, m$. (Мы учли, что $|t-d|>0$, во втором случае.) Поскольку $-\beta+m-1>-1$, особенности $G_i^\pm(t, s)$ слабые и полная непрерывность $G_i: L_\infty[0, b]\to C[0, b]$ устанавливается стандартным образом подавлением особенностей (см. напр. [9], с. 19).

Предложение 3 доказано.

4. Предложение 4. *Интегральный оператор T переводит пространство E^β в себя и вполне непрерывен в этом пространстве.*

Доказательство. Кроме E_d^β введем еще подпространства $E_0^\beta\subset E^\beta$ и $E_b^\beta\subset E^\beta$, состоящие из функций, удовлетворяющих условиям

$$u\in C[0, b]\cap C^m(0, b], \quad u^{(i)}(d)=u^{(i)}(b)=0, \quad i=0, 1, \ldots, m,$$

$$|u^{(m)}(t)|\leqslant ct^{-\beta} \quad \text{в} \quad E_0^\beta \quad \text{и}$$

$$u\in C[0, b]\cap C^m[0, b), \quad u^{(i)}(0)=u^{(i)}(d)=0, \quad i=0, 1, \ldots, m,$$

$$|u^{(m)}(t)\leqslant c(b-t)^{-\beta} \quad \text{в} \quad E_b^\beta.$$

Проводя аналогичные пунктам 2—3 рассуждения (см. также [9], § 1), ясно, что T переводит E_0^β в E^β и E_b^β в E^β и вполне непрерывен между этими пространствами.

Зафиксируем две какие-либо функции $e, h\in C^\infty[0, b]$ такие, что $e(t)=1$ для $t\in[0, d/3]$ и $e(t)=0$ для $t\in[2d/3, b]$, а $h(t)=0$ для $t\in[0, b-2(b-d)/3$ и $h(t)=1$ для $t\in[b-(b-d)/3, b]$. Любую функцию $u\in E^\beta$ представим в виде

$$u=v+w+z, \quad v=e\cdot u\in E_0^\beta, \quad z=h\cdot u\in E_b^\beta,$$

$$w=(1-e-h)\cdot u\in E_d^\beta. \tag{20}$$

Тогда $Tu=Tv+Tw+Tz\in E^\beta$, т. е. оператор T переводит E^β в себя.

Если $\{u_n\}$ — ограниченная в E^β последовательность, то по формулам (20) полученные последовательности $\{v_n\}$, $\{w_n\}$, $\{z_n\}$ ограниченные, соответственно, в $E_0{}^\beta$, $E_d{}^\beta$ и $E_b{}^\beta$. Следовательно, $\{Tu_n\}$, $\{Tw_n\}$ и $\{Tz_n\}$ компактны в E^β. Это доказывает полную непрерывность оператора T в E^β.

Отметим, что аналогично (18) для функций $v\in E_0{}^\beta$ и $z\in E_b{}^\beta$ справедливы неравенства

$$\begin{gathered}|(D^kTv)(t)-(-1)^{k-1}v(0)\bar{\varkappa}_{0,k-1}(t)|\leqslant c(t^{2(m-\beta)-k}+1),\\ |(D^kTz)(t)-(-1)^{k}z(b)\tilde{\varkappa}_{0,k-1}(t)|\leqslant c((b-t)^{2(m-\beta)-k}+1),\end{gathered}\tag{21}$$

где

$$\begin{gathered}\bar{\varkappa}_{0,k-1}(t)=\frac{\partial^{k-1}}{\partial s^{k-1}}[a_0^-(t,s)\varkappa(t-s)]_{s=0},\\ \tilde{\varkappa}_{0,k-1}(t)=\frac{\partial^{k-1}}{\partial s^{k-1}}[a_0^+(t,s)\varkappa(t-s)]_{s=b},\quad k=2,\ \ldots,\ m.\end{gathered}\tag{22}$$

5. Доказательство теоремы 2. Пусть $f\in E^\beta$ (позже это условие усилим), а $u(t)$ — решение уравнения (1). По теореме 1 $u(t)\in E^\beta$ и дифференцированием (1) находим

$$u^{(k)}(t)=\frac{d^k}{dt^k}(Tu)(t)+f^{(k)}(t),\quad 0<t<b,\quad t\neq d,\quad k=2,\ \ldots,\ m.$$

Представив $u(t)$ в виде (20), получим

$$u^{(k)}(t)=\frac{d^k}{dt^k}(Tv)(t)+\frac{d^k}{dt^k}(Tw)(t)+\frac{d^k}{dt^k}(Tz)(t)+f^{(k)}(t).$$

Из неравенства (18) для $w\in E_d{}^\beta$ и (21) имеем

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{dt^k}(Tv)(t)&=(-1)^{k-1}v(0)\bar{\varkappa}_{0,k-1}(t)+O(t^{2(m-\beta)-k}+1),\\ \frac{d^k}{dt^k}(Tw)(t)&=(-1)^{k-1}w(d)[\varkappa^+_{0,k-1}(t)-\varkappa^-_{0,k-1}(t)]+\\ &\qquad+O(|t-d|^{2(m-\beta)-k+p}+1),\\ \frac{d^k}{dt^k}(Tz)(t)&=(-1)^{k}z(b)\tilde{\varkappa}_{0,k-1}(t)+O((b-t)^{2(m-\beta)-k}+1),\end{aligned}$$

где $v(0)=u(0)$, $w(d)=u(d)$ и $z(b)=u(b)$. В силу предположения гладкости функции $a(t,s)$ получим (см. также (19))

$$\begin{aligned}&\varkappa^+_{0,k-1}(t)-\varkappa^-_{0,k-1}(t)=\frac{\partial^{k-1}}{\partial s^{k-1}}[(a_0^+(t,s)-a_0^-(t,s))\varkappa(t-s)]_{s=d}=\\ &=(-1)^{k-1-p}\binom{k-1}{p}\frac{\partial^p}{\partial s^p}[a_0^+(t,s)-a_0^-(t,s)]\frac{\partial s^{k-1-p}}{\partial s^{k-1-p}}\varkappa(t-s)\Big|_{s=d}+\\ &\qquad+O(\varkappa^{(k-2-p)}(t-d))\end{aligned}$$

и с учетом (22)

$$\begin{gathered}\bar{\varkappa}_{0,k-1}(t)=(-1)^{k-1}a_0^-(t,0)\varkappa^{(k-1)}(t)+O(\varkappa^{(k-2)}(t))\\ \tilde{\varkappa}_{0,k-1}(t)=(-1)^{k-1}a_0^+(t,b)\varkappa^{(k-1)}(t-b)+O(\varkappa^{(k-2)}(t-b)).\end{gathered}$$

Итак,

$$u^{(k)}(t)=u(0)\,a_0^-(t,0)\,\varkappa^{(k-1)}(t)-u(b)\,a_0^+(t,b)\,\varkappa^{(k-1)}(t-b)+z_k(t)+f^{(k)}(t)+$$
$$+u(d)\binom{k-1}{p}(-1)^p\left[\frac{\partial^p}{\partial s^p}a_0^+(t,s)\Big|_{s=d}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial^p}{\partial s^p}a_0^-(t,s)\Big|_{s=d}\right]\varkappa^{(k-1-p)}(t-d),$$

где $z_k(t)$ — некоторая непрерывная на $(0,d)$ и (d,b) функция, такая, что

$$|z_k(t)|\leqslant c\,(t^{2(m-\beta)-k}+|t-d|^{2(m-\beta)-k+p}+(b-t)^{2(m-\beta)-k}+|\varkappa^{(k-2)}(t)|+$$
$$+|\varkappa^{(k-2-p)}(t-d)|+|\varkappa^{(k-2)}(t-b)|).$$

В силу неравенств (3) и (4) отсюда следуют предельные соотношения теоремы 2 при $v_k(t)=z_k(t)$. Таким же предельным соотношениям удовлетворяет $f^{(k)}(t)$, если $f\in C^m[0,b]$ или даже если $f\in E^\alpha$ с $\alpha<\gamma$, где γ из (3). В результате приходим к представлению (5), (6), где $v_k(t)=z_k(t)+f^{(k)}(t)$. Для $k=1$ соответствующее представление следует из (8).

Теорема 2 доказана.

6. Замечание 1. Мы не предполагаем однозначной разрешимости уравнения (1). В случае $f=0$ теоремы 1 и 2 дают оценки производных собственных функций интегрального оператора в (1).

Замечание 2. Теоремы 1 и 2 справедливы и в случае, где β — целое число $(0<\beta<m)$. Тогда оценки (7) верны для всех производных, кроме производной порядка $k=m-1-\beta$, для нее из (2) вытекает

$$|\varkappa^{(k)}(t)\leqslant c_k(|\ln|t||+1).$$

Соответственно, должно несколько отличаться поведение низших производных функции $u(t)$ в пространстве E^β.

Замечание 3. Аналогичные теоремам 1 и 2 утверждения справедливы и в случае конечного числа (N) линий разрывов по s производных коэффициента $a(t,s)$, причем наименьшие числа p_i $(i=1,\ldots,N)$, при которых $\partial^{p_i}a(t,s)/\partial s^{p_i}$ имеет при $s=d_i$ разрыв первого рода, могут быть различны $(0\leqslant p_i\leqslant\beta)$.

Замечание 4. Если (3) имеет место с $\gamma=\beta$, то оценки производных решения интегрального уравнения (1), установленные теоремой 1, точны по порядку.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Richter, G. R.* J. Math. Anal. and Appl., 55, 32—42 (1976).
2. *Schneider, C.* Integr. Eq. Operator Theory, 2, 62—68 (1979).
3. *Педас А.* Уч. зап. Тартуск. ун-та, вып. 492, 56—68 (1979).
4. *Вайникко Г., Педас А.* Оценки производных решения интегрального уравнения со слабо особым ядром. Тез. конференции «Теоретические и прикладные вопросы математики». Тарту, Изд-во Тартуск. ун-та, 1980, 193—195.
5. *Vainikko, G., Pedas, A.* J. Austral. Math. Soc., Ser. B, 22, 419—430 (1981).
6. *Graham, I. G.* J. Integr. Equat., 4, № 1, 1—30 (1982).
7. *Уба П. Р.* Приближенное решение интегрального уравнения со слабо особым ядром на неравномерной сетке. Канд. дис. Тарту, 1983.
8. *Pitkäranta, J.* SIAM J. Math. Anal., 11, 952—968 (1980).
9. *Вайникко Г., Педас А., Уба П.* Методы решения слабо-сингулярных интегральных уравнений. Тарту, 1984.
10. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1971.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 4/V 1987

P. UBA

KATKEVA KORDAJAGA NÕRGALT SINGULAARSE INTEGRAALVÕRRANDI LAHENDI SILEDUS

Vaadeldakse lineaarset II liiki integraalvõrrandit

$$u(t)=\int_0^b a(t,s)\varkappa(t-s)u(s)ds+f(t), \quad 0\leqslant t\leqslant b,$$

kus vabaliige $f(t)$ on piisavalt sile ($f\in C^m[0,b]$, $m\geqslant 1$), aga funktsioonil $\varkappa^{(i)}(t)$ ($0\leqslant i\leqslant m-1$) on punktis $t=0$ integreeruv iseärasus. On teada, et $a(t,s)\in C^m([0,b]\times\times[0,b])$ korral võrrandi lahend $u(t)$ on vahemikus $(0,b)$ m korda pidevalt diferentseeruv, aga $u^{(k)}(t)$ käitub lõigu otspunktide lähedal nagu $\varkappa^{(k-1)}(t)$ nullpunktis ($i\leqslant k-1\leqslant\leqslant m-1$).

Käesolevas artiklis on nõrgendatud tingimusi kordajale $a(t,s)$. Nimelt eeldatakse, et p ($0\leqslant p\leqslant m$) on vähim täisarv, mille korral funktsioonil $\frac{\partial^p}{\partial s^p}a(t,s)$ on sirgel $s=d$ esimest liiki katkevus. Selgub, et sellisel juhul käitub võrrandi lahend $u(t)\in C^p(0,b)\cap\cap C^m((0,b)\setminus\{d\})$ lõigu otspunktide ümbruses nagu varem, aga punkti $t=d$ ümbruses käitub funktsioon $u^{(p+l)}(t)$ ($1\leqslant l\leqslant m-p$) nagu funktsioon $\varkappa^{(l-1)}(t)$ nullpunktis.

P. UBA

THE SMOOTHNESS OF SOLUTION OF WEAKLY SINGULAR INTEGRAL EQUATION WITH A DISCONTINUOUS COEFFICIENT

We examine the differential properties of the solution of the linear integral equation

$$u(t)=\int_0^b a(t,s)\varkappa(t-s)u(s)ds+f(t), \quad 0\leqslant t\leqslant b,$$

where $\varkappa\in C^{m-1}([-b,b]\setminus\{0\})$, $m\geqslant 1$ and, for $-b\leqslant t<0$ and $0<t\leqslant b$, $|\varkappa^{(m-1)}(t)\leqslant\leqslant c|t|^{-\beta}$ is valid with $0<\beta<m$.

It is well known (see [1–9]) that in case of $f\in C^m[0,b]$ and $a(t,s)\in C^m([0,b]\times\times[0,b])$ a singularity of $\varkappa^{(k-1)}(t)$ ($1\leqslant k\leqslant m$) at 0 determines the singularities of the same order of $u^{(k)}(t)$ at 0 and b.

In this paper we study a case with weaker conditions on $a(t,s)$. We assume that p is the least integer, by which the function $\frac{\partial^p}{\partial s^p}a(t,s)$ has the first kind discontinuity on the straight line $s=d$ ($0<d<b$). We prove that, in addition to singularities at the end points, the $(p+l)$-th derivative ($1\leqslant l\leqslant m-p$) of the solution $u(t)$ behave at the point d as the function $\varkappa^{(l-1)}(t)$ at 0.