

УДК 517.968.21

П. УБА

ГЛАДКОСТЬ РЕШЕНИЯ СЛАБО-СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

(Представил Г. Вайникко)

Рассматривается линейное интегральное уравнение второго рода

$$u(t) = \int_0^b a(t, s) \kappa(t-s) u(s) ds + f(t), \quad 0 \leq t \leq b, \quad (1)$$

в котором $\kappa \in C^{m-1}([-b, b] \setminus \{0\})$, $m \geq 1$, причем при $-b \leq t < 0$ и $0 < t \leq b$ справедлива оценка

$$|\kappa^{(m-1)}(t)| \leq c|t|^{-\beta}, \quad 0 < \beta < m, \quad (2)$$

где β — дробное число.

В [1-7] показано, что если $f \in C^m[0, b]$ и $a(t, s) \equiv 1$, то особенность функции $\kappa^{(h)}(t)$ влечет за собой особенности такого же порядка $(k+1)$ -го производного решения в обоих концах отрезка интегрирования, а внутри промежутка $(0, b)$ решение m раз непрерывно дифференцируемо. В случае достаточно гладкого по обоим переменным коэффициента $a(t, s)$ как это видно из [8-9], характер особенностей производных решения останется таким же.

В настоящей работе изучается случай негладкого по параметру s коэффициента $a(t, s)$. Отметим, что краткий исторический очерк и библиографические замечания к решению слабо-сингулярных интегральных уравнений даны в [9].

1. Предположим, что $a(t, s)$ m раз непрерывно дифференцируема на $[0, b] \times [0, d]$ и $[0, b] \times [d, b]$ и целое p ($0 \leq p < \beta$) — наименьшее, при котором $\frac{\partial^p}{\partial s^p} a(t, s)$ имеет при $s=d$ ($0 < d < b$) разрыв первого рода. Введем класс функций

$$E^\beta = \left\{ u \in C[0, b] \cap C^p(0, b) \cap C^m((0, b) \setminus \{d\}) : \sup_{\substack{0 < t < b \\ t \neq d}} \frac{|u^{(m)}(t)|}{t^{-\beta} + |t-d|^{-\beta+p} + (b-t)^{-\beta}} < \infty \right\}.$$

Снабженное нормой

$$\|u\|_{E^\beta} = \|u\|_C + \sup_{\substack{0 < t < b \\ t \neq d}} \frac{|u^{(m)}(t)|}{t^{-\beta} + |t-d|^{-\beta+p} + (b-t)^{-\beta}},$$

класс E^β превращается в банахово пространство.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $f \in E^{\beta}$ и пусть выполнены предположения о функциях $\kappa(t)$ и $a(t, s)$. Если уравнение (1) имеет интегрируемое решение u , то $u \in E^{\beta}$.

Теорема 2. Пусть $f \in C^m[0, b]$, выполнены предположения о функциях $\kappa(t)$ и $a(t, s)$ и, кроме того, в окрестности нуля справедливы оценки снизу

$$|\kappa^{(k)}(t)| \geq c_k |t|^{-\gamma+m-1-k}, \quad 0 < |t| \leq \delta, \quad k=0, 1, \dots, m-1, \quad (3)$$

где $c_k = \text{const} > 0$, а γ удовлетворяет неравенствам

$$\beta - (m - \beta) < \gamma \leq \beta. \quad (4)$$

Тогда для тех $k=1, \dots, m$, для которых $\kappa^{(k-1)}(t)$ уже имеет при $t=0$ особенность, имеют место представления

$$\begin{aligned} u^{(k)}(t) = & u(0)a(t, 0)\kappa^{(k-1)}(t) - u(b)a(t, b)\kappa^{(k-1)}(t-b) + v_k(t) + \\ & + (-1)^p \binom{k-1}{p} u(d) \left[\frac{\partial^p}{\partial s^p} a(t, s) \Big|_{s=d+0} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial^p}{\partial s^p} a(t, s) \Big|_{s=d-0} \right] \kappa^{(k-1-p)}(t-d), \end{aligned} \quad (5)$$

где $v_k \in C^{m-k}((0, b) \setminus \{d\})$,
причем

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{v_k(t)}{\kappa^{(k-1)}(t)} = 0, \quad \lim_{|t-d| \rightarrow 0} \frac{v_k(t)}{\kappa^{(k-1-p)}(t-d)} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow b-} \frac{v_k(t)}{\kappa^{(k-1)}(t-b)} = 0. \quad (6)$$

В случае $k-1-p < 0$ последнее слагаемое в выражении (5) отсутствует.

Теорема 2 говорит о том, что $(p+l)$ -я ($1 \leq l \leq m-p$) производная решения уравнения (1) при $t \rightarrow d-$ и $t \rightarrow d+$ имеет такие же особенности, как функция $\kappa^{(l-1)}(t)$ соответственно при $t \rightarrow 0-$ и $t \rightarrow 0+$. Доказательство этой теоремы построено в пункте 5.

Доказательство теоремы 1 основывается на следующем результате (см. [9], с. 10):

Пусть E и E_1 — банаховы пространства, причем E непрерывно и плотно вложено в E_1 . Пусть $T: E \rightarrow E$ и $K: E_1 \rightarrow E_1$ — линейные вполне непрерывные операторы, причем $T \subset K$ является сужением оператора K на E . Если уравнение $u_1 + Ku_1 = f$ с $f \in E \subset E_1$ разрешимо в E_1 , то его решения принадлежат E .

Положим $E = E^{\beta}$ и $E_1 = L_1 = L_1[0, b]$,

$$(Tu)(t) = \int_0^b a(t, s)\kappa(t-s)u(s)ds, \quad u \in E^{\beta}$$

и

$$(Ku)(t) = \int_0^b a(t, s)\kappa(t-s)u(s)ds, \quad u \in L_1.$$

Полная непрерывность оператора $K: L_1 \rightarrow L_1$ в условиях (2) очевидна, доказательство полной непрерывности оператора T в E^{β} вынесено в пунктах 2—4. Применение этого результата дает, что в случае $f \in E^{\beta}$ решение уравнения (1) принадлежит E^{β} .

2. Заметим, что из (2) вытекают неравенства

$$|\kappa^{(k)}(t)| \leq c_k (|t|^{-\beta+m-1-k} + 1), \quad k=0, 1, \dots, m-1, \quad (7)$$

которые в дальнейшем будут неоднократно использованы.

Введем следующие обозначения

$$a_0(t, s) = a(t, s) = \begin{cases} a_0^-(t, s), & 0 \leq s \leq d, \\ a_0^+(t, s), & d \leq s \leq b, \end{cases}$$

$$a_i(t, s) = \left(-\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right) a_{i-1}(t, s) = \begin{cases} a_i^-(t, s), & 0 \leq s \leq d, \\ a_i^+(t, s), & d \leq s \leq b, \end{cases}$$

и интегральные операторы

$$(T_i u)(t) = \int_0^b a_i(t, s) \kappa(t-s) u(s) ds = \int_0^d a_i^-(t, s) \kappa(t-s) u(s) ds + \\ + \int_d^b a_i^+(t, s) \kappa(t-s) u(s) ds, \quad i=1, \dots, m.$$

Ясно, что сопряженный к T_i оператор T_i^* выражается в виде

$$(T_i^* u)(s) = \int_0^b a_i(t, s) \kappa(t-s) u(t) dt = \begin{cases} \int_0^d a_i^-(t, s) \kappa(t-s) u(t) dt, & 0 \leq s \leq d, \\ \int_0^b a_i^+(t, s) \kappa(t-s) u(t) dt, & d \leq s \leq b. \end{cases}$$

Предложение 1. Для $u \in E^b$ справедлива формула

$$(Tu)'(t) = (Tu')(t) + (T_1 u)(t) + u(0) a(t, 0) \kappa(t) - u(b) a(t, b) \kappa(t-b) + \\ + u(d) [a_0^+(t, d) - a_0^-(t, d)] \kappa(t-d). \quad (8)$$

Доказательство. Заменой $t-s=\sigma$ запишем Tu в виде

$$(Tu)(t) = - \int_t^{t-d} a_0^-(t, t-\sigma) \kappa(\sigma) u(t-\sigma) d\sigma - \\ - \int_{t-d}^{t-b} a_0^+(t, t-\sigma) \kappa(\sigma) u(t-\sigma) d\sigma.$$

Известное правило дифференцирования таких интегралов дает

$$(Tu)'(t) = - \int_t^{t-d} [a_1^-(t, t-\sigma) \kappa(\sigma) u(t-\sigma) + \\ + a_0^-(t, t-\sigma) \kappa(\sigma) u'(t-\sigma)] d\sigma - [a_0^-(t, t-\sigma) \kappa(\sigma) u(t-\sigma)]_{\sigma=t}^{\sigma=t-d} - \\ - [a_0^+(t, t-\sigma) \kappa(\sigma) u(t-\sigma)]_{\sigma=t-d}^{\sigma=t-b} - \int_{t-d}^{t-b} [a_1^+(t, t-\sigma) \kappa(\sigma) u(t-\sigma) + \\ + a_0^+(t, t-\sigma) \kappa(\sigma) u'(t-\sigma)] d\sigma.$$

Вернувшись в подынтегральных членах к переменной s , после несложных преобразований приходим к формуле (8).

Предложение 1 доказано.

В ходе рассуждений нам понадобится понятие обобщенных производных (см. напр., [10]). Обозначим через $\langle z, \varphi \rangle$ значение обобщенной функции z на бесконечно дифференцируемой финитной в $\Omega_d = \{(0, b) \setminus \{d\}\}$ функции φ (основные функции). Отметим, что если m -я обобщенная производная $D^m z \in C(0, b)$, то z дифференцируема и в

классическом смысле, и обобщенная производная совпадает с классической: $D^m z = z^{(m)}$. Для основных функций φ справедливы следующие равенства (см. [9], с. 13):

$$T_0^* D^k \varphi = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} D^i T_{k-i}^* \varphi, \quad k=0, \dots, m. \quad (9)$$

При выводе формулы для высших производных от Tu будем предполагать, что $u \in E^\beta$ имеет особенности только в точке $d \in (0, b)$.

Предложение 2. Пусть $m \geq 2$,

$$u \in C^p[0, b] \cap C^m([0, b] \setminus \{d\}), \quad u^{(i)}(0) = u^{(i)}(b) = 0,$$

$$i=0, 1, \dots, m, \quad |u^{(m)}(t)| \leq c(|t-d|^{-\beta+p}+1), \quad t \in \{[0, b] \setminus \{d\}\}, \quad (10)$$

$$0 < \beta < m.$$

Тогда для $k=2, \dots, m$ справедлива формула

$$\begin{aligned} (D^k Tu)(t) = & \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left\{ \int_0^d g_{i,k}^-(t, s) u^{(i)}(s) ds + \int_d^b g_{i,k}^+(t, s) u^{(i)}(s) ds \right\} + \\ & + (-1)^{k-1} u(d) \left\{ \left[\frac{\partial^{k-1}}{\partial s^{k-1}} (a_0^+(t, s) \kappa(t-s)) \right]_{s=d} - \right. \\ & \left. - \left[\frac{\partial^{k-1}}{\partial s^{k-1}} (a_0^-(t, s) \kappa(t-s)) \right]_{s=d} \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$g_{0,k}^\pm(t, s) = a_{k,k}^\pm(t, s) \kappa(t-s),$$

$$g_{i,k}^\pm(t, s) = a_{k-i,i}^\pm(t, s) \kappa(t-s) - \sum_{j=0}^{i-1} \kappa_{k-i,j}^\pm(t) \frac{(s-d)^j}{j!},$$

$$i=1, \dots, k-1,$$

$$g_{k,k}^\pm(t, s) = a_0^\pm(t, s) \kappa(t-s) - \sum_{j=0}^{k-2} \kappa_{0,j}^\pm(t) \frac{(s-d)^j}{j!}, \quad (12)$$

$$\kappa_{i,j}^\pm(t) = \left[\frac{\partial^j (a_i^\pm(t, s) \kappa(t-s))}{\partial s^j} \right]_{s=d}, \quad t \neq d, \quad i+j \leq m.$$

Доказательство. Для любой основной функции φ в силу (9) имеем

$$\langle D^k Tu, \varphi \rangle = (-1)^k \langle Tu, D^k \varphi \rangle = (-1)^k \langle u, T^* D^k \varphi \rangle =$$

$$= (-1)^k \int_0^b u(s) (T^* D^k \varphi)(s) ds =$$

$$= (-1)^k \int_0^b u(s) \left[\sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} (D^i T_{k-i}^* \varphi)(s) \right] ds = \int_0^b u(s) (T_k^* \varphi)(s) ds +$$

$$+ \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{k}{i} \int_0^d u(s) \frac{d^i}{ds^i} [(T_{k-i}^* \varphi)(s) - v_{i,k}^-(s)] ds +$$

$$+ \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{k}{i} \int_d^b u(s) \frac{d^i}{ds^i} [(T_{k-i}^* \varphi)(s) - v_{i,k}^+(s)] ds,$$

где $v_{i,h}^{\pm}(s)$ — произвольные многочлены степени $i-1$. Мы их выбираем так:

$$v_{i,h}^{\pm}(s) = \sum_{j=0}^{i-1} \left[\frac{d^j}{ds^j} (T_{h-i}^* \varphi)(s) \right]_{s=d \pm} \cdot \frac{(s-d)^j}{j!}, \quad i=1, \dots, k-1,$$

$$v_{k,h}^{\pm}(s) = \sum_{j=0}^{h-2} \left[\frac{d^j}{ds^j} (T_0^* \varphi)(s) \right]_{s=d \pm} \cdot \frac{(s-d)^j}{j!}.$$

Тогда для $i=1, 2, \dots, k-1$ функции $(T_{h-i}^* \varphi)(s) - v_{i,h}^{\pm}(s)$ и их производные до порядка $i-1$ включительно обращаются в точке $s=d$ в нуль; при $i=k$ аннулируются производные до порядка $k-2$. Учитывая (10), интегрированием по частям находим

$$\begin{aligned} \langle D^h T u, \varphi \rangle &= \int_0^b u(s) (T_h^* \varphi)(s) ds + \\ &+ \sum_{i=1}^h \binom{k}{i} \int_0^d u^{(i)}(s) [(T_{h-1}^* \varphi)(s) - v_{i,h}^-(s)] ds + \\ &+ \sum_{i=1}^h \binom{k}{i} \int_d^b u^{(i)}(s) [(T_{h-i}^* \varphi)(s) - v_{i,h}^+(s)] ds + \\ &+ (-1)^k \left\{ u(s) \frac{d^{h-1}}{ds^{h-1}} [(T_0^* \varphi)(s)] \right\}_{s=0}^{s=d-} + \\ &+ (-1)^k \left\{ u(s) \frac{d^{h-1}}{ds^{h-1}} [(T_0^* \varphi)(s)] \right\}_{s=d+}^{s=b}, \end{aligned}$$

остальные внеинтегральные члены аннулируются. В интегралах

$$(T_i^* \varphi)(s) = \begin{cases} \int_0^b a_i^-(t, s) \kappa(t-s) \varphi(t) dt, & 0 \leq s \leq d, \\ \int_0^b a_i^+(t, s) \kappa(t-s) \varphi(t) dt, & d \leq s \leq b \end{cases}$$

интегрирование в действительности происходит по носителю $\text{supp } \varphi \subset \Omega_d$ и при $s=d$ аргумент $t-s$ функции $\kappa(t-s)$ отделен от нуля. Это позволяет вычислять производные при $s=d$ дифференцированием под знаком интеграла:

$$\begin{aligned} \frac{d^j}{ds^j} (T_i^* \varphi)(s) \Big|_{s=d \pm} &= \int_0^b \left[\frac{\partial^j}{\partial s^j} (a_i^{\pm}(t, s) \kappa(t-s)) \right]_{s=d} \varphi(t) dt = \\ &= \int_0^b \kappa_{i,j}^{\pm}(t) \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Проделав соответствующие подстановки, имеем

$$\langle D^h T u, \varphi \rangle = \int_0^d u(s) \int_0^b a_h^-(t, s) \kappa(t-s) \varphi(t) dt ds +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_d^b u(s) \int_0^b a_k^+(t, s) \kappa(t-s) \varphi(t) dt ds + \\
& + \sum_{i=1}^{h-1} \binom{k}{i} \int_0^d u^{(i)}(s) \left\{ \int_0^b a_{h-i}^-(t, s) \kappa(t-s) \varphi(t) dt - \right. \\
& - \sum_{j=0}^{i-1} \int_0^b \kappa_{i,j}^-(t) \varphi(t) dt \frac{(s-d)^j}{j!} \Big\} ds + \\
& + \int_0^d u^{(h)}(s) \left\{ \int_0^b \left[a_0^-(t, s) \kappa(t-s) - \sum_{j=0}^{h-2} \kappa_{0,j}^-(t) \frac{(s-d)^j}{j!} \right] \varphi(t) dt \right\} ds + \\
& + \sum_{i=1}^{h-1} \binom{k}{i} \int_d^b u^{(i)}(s) \left\{ \int_0^b a_{h-i}^+(t, s) \kappa(t-s) \varphi(t) dt - \right. \\
& - \sum_{j=0}^{i-1} \int_0^b \kappa_{i,j}^+(t) \varphi(t) dt \frac{(s-d)^j}{j!} \Big\} ds + \\
& + \int_d^b u^{(h)}(s) \left\{ \int_0^b \left[a_0^+(t, s) \kappa(t-s) - \sum_{j=0}^{h-2} \kappa_{0,j}^+(t) \frac{(s-d)^j}{j!} \right] \varphi(t) dt \right\} ds + \\
& + (-1)^h u(d) \int_0^b [\kappa_{0,h-1}^-(t) - \kappa_{0,h-1}^+(t)] \varphi(t) dt.
\end{aligned}$$

В обозначениях (12) это можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\langle D^h T u, \varphi \rangle = & (-1)^h u(d) \int_0^b [\kappa_{0,h-1}^-(t) - \kappa_{0,h-1}^+(t)] \varphi(t) dt + \\
& + \sum_{i=0}^h \binom{k}{i} \int_0^d \left\{ \int_0^b g_{i,h}^-(t, s) \varphi(t) dt \right\} u^{(i)}(s) ds + \\
& + \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \int_d^b \left\{ \int_0^b g_{i,h}^+(t, s) \varphi(t) dt \right\} u^{(i)}(s) ds. \quad (13)
\end{aligned}$$

Установим правомерность изменения в последних интегралах порядка интегрирования. Достаточно показать, что сходятся двойные интегралы

$$\int_0^b \int_0^d |u^{(i)}(s)| |g_{i,h}^-(t, s)| |\varphi(t)| ds dt \quad \text{и} \quad \int_0^b \int_d^b |u^{(i)}(s)| |g_{i,h}^+(t, s)| |\varphi(t)| ds dt$$

или любой из соответствующих повторных интегралов. Из (10) следуют оценки

$$|u^{(i)}(s)| \leq c_i (|s-d|^{-\beta+m-i+p} + 1), \quad i=0, 1, \dots, m, \quad (14)$$

а из (2) и (7), что

$$|g_{i,0}^{\pm}(t,s)| \leq c|t-s|^{-\beta+m-1}$$

$$|g_{i,h}^{\pm}(t,s)| \leq c(|t-s|^{-\beta+m-1} + \sum_{j=0}^{i-1} (|t-d|^{-\beta+m-j-1} + 1)(s-d)^j),$$

$$i=1, \dots, k-1, \quad (15)$$

$$|g_{k,h}^{\pm}(t,s)| \leq c(|t-s|^{-\beta+m-1} + \sum_{j=0}^{k-2} (|t-d|^{-\beta+m-j-1} + 1)(s-d)^j).$$

Но эти оценки слишком грубы около $s=d$. Тракуя $g_{i,h}^{\pm}(t,s)$ как остаточные члены формулы Тейлора для функций $a_{h-i}^{\pm}(t,s)\chi(t-s)$, можем оценить

$$|g_{i,h}^{-}(t,s)| \leq \max_{s \leq \rho \leq d} \frac{\partial^i}{\partial \rho^i} [a_{h-i}^{-}(t,\rho)\chi(t-\rho)] \frac{(s-d)^i}{i!},$$

$$|g_{i,h}^{+}(t,s)| \leq \max_{d \leq \rho \leq s} \frac{\partial^i}{\partial \rho^i} [a_{h-i}^{+}(t,\rho)\chi(t-\rho)] \frac{(s-d)^i}{i!},$$

откуда для близких к d переменных s ($|s-d| \leq |t-d|/2$) получаем

$$|g_{i,h}^{\pm}(t,s)| \leq c(|t-d|^{-\beta+m-1-i} + 1)(s-d)^i, \quad i=0, 1, \dots, k-1, \quad (16)$$

$$|g_{k,h}^{\pm}(t,s)| \leq c(|t-d|^{-\beta+m-h} + 1)(s-d)^h. \quad (17)$$

В интеграле

$$\int_0^d |u^{(i)}(s)| |g_{i,h}^{-}(t,s)| ds \leq c_i \left(\int_0^{\frac{t+d}{2}} + \int_{\frac{t+d}{2}}^d \right) \times$$

$$\times (|g_{i,h}^{-}(t,s)| (|s-d|^{-\beta+m-i+p} + 1) ds), \quad i=0, 1, \dots, k$$

для $(t+d)/2 \leq s \leq d$ воспользуемся оценкой (16) или (17), а для $0 < s < (t+d)/2$ оценкой (15). Аналогично поступаем с интегралом

$$\int_d^b |u^{(i)}(s)| |g_{i,h}^{+}(t,s)| ds.$$

Несложный подсчет показывает, что

$$\int_0^d |u^{(i)}(s)| |g_{i,h}^{-}(t,s)| ds \leq c(|t-d|^{2(m-\beta)-i+p} + 1),$$

$$\int_d^b |u^{(i)}(s)| |g_{i,h}^{+}(t,s)| ds \leq c(|t-d|^{2(m-\beta)-i+p} + 1).$$

Теперь, учитывая финитность функции φ , заключаем, что повторные интегралы

$$\int_0^b \left\{ \int_0^d |u^{(i)}(s)| |g_{i,h}^{-}(t,s)| ds \right\} \varphi(t) dt \quad \text{и} \quad \int_0^b \left\{ \int_d^b |u^{(i)}(s)| |g_{i,h}^{+}(t,s)| ds \right\} \varphi(t) dt$$

сходятся.

Поменяв порядок интегрирования в (13), имеем

$$\langle D^k Tu, \varphi \rangle = (-1)^{k-1} u(d) \int_0^b [\kappa_{0,k-1}^+(t) - \kappa_{0,k-1}^-(t)] \varphi(t) dt + \\ + \int_0^b \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left\{ \int_0^d g_{ik}^-(t, s) u^{(i)}(s) ds + \int_d^b g_{ik}^+(t, s) u^{(i)}(s) ds \right\} \varphi(t) dt$$

откуда, ввиду произвольности φ , вытекает утверждение предложения 2.

Из проведенных оценок следует также сходимость интегралов в (11) и неравенство

$$|(D^k Tu)(t) - (-1)^{k-1} u(d) [\kappa_{0,k-1}^+(t) - \kappa_{0,k-1}^-(t)]| \leq \\ \leq c(|t-d|^{2(m-\beta)-k+p+1}), \quad 2 \leq k \leq m. \quad (18)$$

Функции $g_{i,k}^\pm(t, s)$ непрерывны при $t \neq s$, $t \neq d$, а особенность при $t=s$ — суммируемая. Легко видно, что интегралы в (11) представляют собой непрерывные при $t \neq d$ функции. Таким образом, производные $D^k Tu$ в (11) в действительности классические.

3. Обозначим через E_d^β подпространство банахова пространства E^β , состоящего из удовлетворяющих условиям (10) функций.

Предложение 3. Оператор T переводит E_d^β в E^β и вполне непрерывен между этими пространствами.

Доказательство. Известно, что слабо-сингулярный интегральный оператор действует и вполне непрерывен в $C[0, b]$. В предложении 2 установлено, что для $u \in E_d^\beta$ существует производная $\frac{d^m}{dt^m}(Tu)(t)$ в $(0, d)$ и в (d, b) . В силу (18)

$$\left| \frac{d^m}{dt^m}(Tu)(t) - (-1)^{m-1} u(d) [\kappa_{0,m-1}^+(t) - \kappa_{0,m-1}^-(t)] \right| \leq \\ \leq c(|t-d|^{(m-\beta)-\beta+p+1}),$$

а в силу (7), (12) и предположения о гладкости функции $a(t, s)$

$$|\kappa_{0,m-1}^+(t) - \kappa_{0,m-1}^-(t)| = \left| \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} \left\{ \frac{\partial^i}{\partial s^i} a^+(t, s) \right\}_{s=d} \times \right. \\ \times \left. \frac{\partial^{m-1-i}}{\partial s^{m-1-i}} \kappa(t-s) \right|_{s=d} - \frac{\partial^i}{\partial s^i} a^-(t, s) \Big|_{s=d} \times \frac{\partial^{m-1-i}}{\partial s^{m-1-i}} \kappa(t-s) \Big|_{s=d} \Big| \leq \\ \leq \left| \sum_{i=p}^{m-1} c \frac{\partial^{m-1-i}}{\partial s^{m-1-i}} \kappa(t-s) \right|_{s=d} \leq c_1(|t-d|^{-\beta+p+1}). \quad (19)$$

Значит, T переводит E_d^β в E^β .

Докажем полную непрерывность $T: E_d^\beta \rightarrow E^\beta$. Пусть $\{u_n\}$ — ограниченная в E_d^β последовательность. Это равносильно неравенствам (14) для u_n с независимыми от n постоянными c_i . Для доказательства компактности $\{Tu_n\}$ в E^β , нам удобно установить компактность последовательности $\{Tu_n + z_n\}$ в E^β , где $\{z_n\}$ с

$$z_n(t) = (-1)^m u_n(d) \underbrace{\int_0^t dt \dots \int_0^t}_{m \text{ интегрирований}} [\kappa_{0,m-1}^+(t) - \kappa_{0,m-1}^-(t)] dt$$

— компактная последовательность в E^β . Отметим, что $z_n^{(m)}(t) = (-1)^m u_n(d) [\kappa_{0,m-1}^+(t) - \kappa_{0,m-1}^-(t)]$. Для установления компактности

некой последовательности $\{y_n\}$ в E^β достаточно показать, что последовательности $\{y_n\}$ и $\{[t^\beta + |t-d|^{\beta-p} + (b-t)^\beta] y_n^{(m)}(t)\}$ компактны в $C[0, b]$. Поскольку последовательность $\{Tu_n + z_n\}$ компактна в $C[0, b]$, то дело сводится к доказательству компактности последовательности $\left\{ |t-d|^{\beta-p} \frac{d^m}{dt^m} (Tu_n + z_n) \right\}$ в $C[0, b]$. (Учитывая (18) и (19), видно, что

в оценках для $\frac{d^m}{dt^m} (Tu_n + z_n)$ доминирует только величина $|t-d|$ и мы можем t^β и $(b-t)^\beta$ опустить.) Последнее, в свою очередь, можно с учетом (11) свести к установлению полной непрерывности интегральных операторов $G_i^-: L_\infty[0, d] \rightarrow C[0, d]$ и $G_i^+: L_\infty[d, b] \rightarrow C[d, b]$, где

$$(G_i^- v)(t) = \int_0^d G_i^-(t, s) v(s) ds \quad \text{и} \quad (G_i^+ v)(t) = \int_d^b G_i^+(t, s) v(s) ds,$$

$$G_i^\pm(t, s) = |t-d|^{\beta-p} g_{i,m}^\pm(t, s) (|s-d|^{-\beta+p+m-i} + 1), \quad i=0, 1, \dots, m.$$

Ядра $G_i^\pm(t, s)$ имеют особенности при $s=d$ и $s=t$. Из оценок (15), (16) и (17) вытекает, что

$$|G_i^\pm(t, s)| \leq \leq c \begin{cases} (|s-d|^{-\beta+m-1} + |t-s|^{-\beta+m-1} + 1) & \text{при } |s-d| \leq |t-d|/2, \\ (|t-s|^{-\beta+m-1} + 1) & \text{при } |s-d| > |t-d|/2, \end{cases}$$

$i=0, 1, \dots, m$. (Мы учли, что $|t-d| > 0$, во втором случае.) Поскольку $-\beta+m-1 > -1$, особенности $G_i^\pm(t, s)$ слабые и полная непрерывность $G_i: L_\infty[0, b] \rightarrow C[0, b]$ устанавливается стандартным образом подавлением особенностей (см. напр. [9], с. 19).

Предложение 3 доказано.

4. Предложение 4. Интегральный оператор T переводит пространство E^β в себя и вполне непрерывен в этом пространстве.

Доказательство. Кроме E_a^β введем еще подпространства $E_0^\beta \subset E^\beta$ и $E_b^\beta \subset E^\beta$, состоящие из функций, удовлетворяющих условиям

$$u \in C[0, b] \cap C^m(0, b], \quad u^{(i)}(d) = u^{(i)}(b) = 0, \quad i=0, 1, \dots, m,$$

$$|u^{(m)}(t)| \leq ct^{-\beta} \quad \text{в } E_0^\beta \quad \text{и}$$

$$u \in C[0, b] \cap C^m[0, b), \quad u^{(i)}(0) = u^{(i)}(d) = 0, \quad i=0, 1, \dots, m,$$

$$|u^{(m)}(t)| \leq c(b-t)^{-\beta} \quad \text{в } E_b^\beta.$$

Проводя аналогичные пунктам 2—3 рассуждения (см. также [9], § 1), ясно, что T переводит E_0^β в E^β и E_b^β в E^β и вполне непрерывен между этими пространствами.

Зафиксируем две какие-либо функции $e, h \in C^\infty[0, b]$ такие, что $e(t) = 1$ для $t \in [0, d/3]$ и $e(t) = 0$ для $t \in [2d/3, b]$, а $h(t) = 0$ для $t \in [0, b - 2(b-d)/3]$ и $h(t) = 1$ для $t \in [b - (b-d)/3, b]$. Любую функцию $u \in E^\beta$ представим в виде

$$u = v + w + z, \quad v = e \cdot u \in E_0^\beta, \quad z = h \cdot u \in E_b^\beta,$$

$$w = (1 - e - h) \cdot u \in E_d^\beta. \quad (20)$$

Тогда $Tu = Tv + Tw + Tz \in E^\beta$, т. е. оператор T переводит E^β в себя.

Если $\{u_n\}$ — ограниченная в E^β последовательность, то по формулам (20) полученные последовательности $\{v_n\}$, $\{w_n\}$, $\{z_n\}$ ограниченные, соответственно, в E_0^β , E_d^β и E_b^β . Следовательно, $\{Tu_n\}$, $\{Tw_n\}$ и $\{Tz_n\}$ компактны в E^β . Это доказывает полную непрерывность оператора T в E^β .

Отметим, что аналогично (18) для функций $v \in E_0^\beta$ и $z \in E_b^\beta$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |(D^k T v)(t) - (-1)^{k-1} v(0) \bar{\kappa}_{0, k-1}(t)| &\leq c(t^{2(m-\beta)-k} + 1), \\ |(D^k T z)(t) - (-1)^k z(b) \tilde{\kappa}_{0, k-1}(t)| &\leq c((b-t)^{2(m-\beta)-k} + 1), \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}_{0, k-1}(t) &= \frac{\partial^{k-1}}{\partial s^{k-1}} [a_0^-(t, s) \kappa(t-s)]_{s=0}, \\ \tilde{\kappa}_{0, k-1}(t) &= \frac{\partial^{k-1}}{\partial s^{k-1}} [a_0^+(t, s) \kappa(t-s)]_{s=b}, \quad k=2, \dots, m. \end{aligned} \quad (22)$$

5. Доказательство теоремы 2. Пусть $f \in E^\beta$ (позже это условие усилим), а $u(t)$ — решение уравнения (1). По теореме 1 $u(t) \in E^\beta$ и дифференцированием (1) находим

$$u^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k} (Tu)(t) + f^{(k)}(t), \quad 0 < t < b, \quad t \neq d, \quad k=2, \dots, m.$$

Представив $u(t)$ в виде (20), получим

$$u^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k} (Tv)(t) + \frac{d^k}{dt^k} (Tw)(t) + \frac{d^k}{dt^k} (Tz)(t) + f^{(k)}(t).$$

Из неравенства (18) для $w \in E_d^\beta$ и (21) имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dt^k} (Tv)(t) &= (-1)^{k-1} v(0) \bar{\kappa}_{0, k-1}(t) + O(t^{2(m-\beta)-k} + 1), \\ \frac{d^k}{dt^k} (Tw)(t) &= (-1)^{k-1} w(d) [\kappa_{0, k-1}^+(t) - \kappa_{0, k-1}^-(t)] + \\ &\quad + O(|t-d|^{2(m-\beta)-k+p} + 1), \\ \frac{d^k}{dt^k} (Tz)(t) &= (-1)^k z(b) \tilde{\kappa}_{0, k-1}(t) + O((b-t)^{2(m-\beta)-k} + 1), \end{aligned}$$

где $v(0) = u(0)$, $w(d) = u(d)$ и $z(b) = u(b)$. В силу предположения гладкости функции $a(t, s)$ получим (см. также (19))

$$\begin{aligned} \kappa_{0, k-1}^+(t) - \kappa_{0, k-1}^-(t) &= \frac{\partial^{k-1}}{\partial s^{k-1}} [(a_0^+(t, s) - a_0^-(t, s)) \kappa(t-s)]_{s=d} = \\ &= (-1)^{k-1-p} \binom{k-1}{p} \frac{\partial^p}{\partial s^p} [a_0^+(t, s) - a_0^-(t, s)] \frac{\partial^{k-1-p}}{\partial s^{k-1-p}} \kappa(t-s) \Big|_{s=d} + \\ &\quad + O(\kappa^{(k-2-p)}(t-d)) \end{aligned}$$

и с учетом (22)

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}_{0, k-1}(t) &= (-1)^{k-1} a_0^-(t, 0) \kappa^{(k-1)}(t) + O(\kappa^{(k-2)}(t)) \\ \tilde{\kappa}_{0, k-1}(t) &= (-1)^{k-1} a_0^+(t, b) \kappa^{(k-1)}(t-b) + O(\kappa^{(k-2)}(t-b)). \end{aligned}$$

Итак,

$$u^{(h)}(t) = u(0) a_0^-(t, 0) \chi^{(h-1)}(t) - u(b) a_0^+(t, b) \chi^{(h-1)}(t-b) + z_h(t) + f^{(h)}(t) + \\ + u(d) \binom{k-1}{p} (-1)^p \left[\frac{\partial^p}{\partial s^p} a_0^+(t, s) \Big|_{s=d} - \right. \\ \left. - \frac{\partial^p}{\partial s^p} a_0^-(t, s) \Big|_{s=d} \right] \chi^{(h-1-p)}(t-d),$$

где $z_h(t)$ — некоторая непрерывная на $(0, d)$ и (d, b) функция, такая, что

$$|z_h(t)| \leq c(t^{2(m-\beta)-h} + |t-d|^{2(m-\beta)-h+p} + (b-t)^{2(m-\beta)-h} + |\chi^{(h-2)}(t)| + \\ + |\chi^{(h-2-p)}(t-d)| + |\chi^{(h-2)}(t-b)|).$$

В силу неравенств (3) и (4) отсюда следуют предельные соотношения теоремы 2 при $v_h(t) = z_h(t)$. Таким же предельным соотношениям удовлетворяет $f^{(h)}(t)$, если $f \in C^m[0, b]$ или даже если $f \in E^\alpha$ с $\alpha < \gamma$, где γ из (3). В результате приходим к представлению (5), (6), где $v_h(t) = z_h(t) + f^{(h)}(t)$. Для $k=1$ соответствующее представление следует из (8).

Теорема 2 доказана.

6. З а м е ч а н и е 1. Мы не предполагаем однозначной разрешимости уравнения (1). В случае $f=0$ теоремы 1 и 2 дают оценки производных собственных функций интегрального оператора в (1).

З а м е ч а н и е 2. Теоремы 1 и 2 справедливы и в случае, где β — целое число ($0 < \beta < m$). Тогда оценки (7) верны для всех производных, кроме производной порядка $k=m-1-\beta$, для нее из (2) вытекает

$$|\chi^{(k)}(t)| \leq c_k(|\ln |t|| + 1).$$

Соответственно, должно несколько отличаться поведение низших производных функции $u(t)$ в пространстве E^β .

З а м е ч а н и е 3. Аналогичные теоремам 1 и 2 утверждения справедливы и в случае конечного числа (N) линий разрывов по s производных коэффициента $a(t, s)$, причем наименьшие числа p_i ($i=1, \dots, N$), при которых $\partial^{p_i} a(t, s) / \partial s^{p_i}$ имеет при $s=d_i$ разрыв первого рода, могут быть различны ($0 \leq p_i \leq \beta$).

З а м е ч а н и е 4. Если (3) имеет место с $\gamma = \beta$, то оценки производных решения интегрального уравнения (1), установленные теоремой 1, точны по порядку.

ЛИТЕРАТУРА

1. Richter, G. R. J. Math. Anal. and Appl., 55, 32—42 (1976).
2. Schneider, C. Integr. Eq. Operator Theory, 2, 62—68 (1979).
3. Педас А. Уч. зап. Тартуск. ун-та, вып. 492, 56—68 (1979).
4. Вайникко Г., Педас А. Оценки производных решения интегрального уравнения со слабо особым ядром. Тез. конференции «Теоретические и прикладные вопросы математики». Тарту, Изд-во Тартуск. ун-та, 1980, 193—195.
5. Vainikko, G., Pedas, A. J. Austral. Math. Soc., Ser. B, 22, 419—430 (1981).
6. Graham, I. G. J. Integr. Equat., 4, № 1, 1—30 (1982).
7. Уба П. П. Приближенное решение интегрального уравнения со слабо особым ядром на неравномерной сетке. Канд. дис. Тарту, 1983.
8. Pitkäranta, J. SIAM J. Math. Anal., 11, 952—968 (1980).
9. Вайникко Г., Педас А., Уба П. Методы решения слабо-сингулярных интегральных уравнений. Тарту, 1984.
10. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1971.

Тартуский государственный
университет

Поступила в редакцию
4/V 1987

KATKEVA KORDAJAGA NÖRGALT SINGULAARSE INTEGRAALVÖRRANDI LAHENDI SILEDUS

Vaadeldakse lineaarset II liiki integraalvõrrandit

$$u(t) = \int_0^b a(t, s) \kappa(t-s) u(s) ds + f(t), \quad 0 \leq t \leq b,$$

kus vabaliige $f(t)$ on piisavalt sile ($f \in C^m[0, b]$, $m \geq 1$), aga funktsioonil $\kappa^{(i)}(t)$ ($0 \leq i \leq m-1$) on punktis $t=0$ integreeruv isärasus. On teada, et $a(t, s) \in C^m([0, b] \times [0, b])$ korral võrrandi lahend $u(t)$ on vahemikus $(0, b)$ m korda pidevalt diferentseeruv, aga $u^{(k)}(t)$ käitub lõigu otspunktide lähedal nagu $\kappa^{(k-1)}(t)$ nullpunktis ($i \leq k-1 \leq m-1$).

Käesolevas artiklis on nõrgendatud tingimusi kordajale $a(t, s)$. Nimelt eeldatakse, et p ($0 \leq p \leq m$) on vähim täisarv, mille korral funktsioonil $\frac{\partial^p}{\partial s^p} a(t, s)$ on sirgel $s=d$ esimest liiki katkevus. Selgub, et sellisel juhul käitub võrrandi lahend $u(t) \in C^p(0, b) \cap C^m((0, b) \setminus \{d\})$ lõigu otspunktide ümbruses nagu varem, aga punkti $t=d$ ümbruses käitub funktsioon $u^{(p+l)}(t)$ ($1 \leq l \leq m-p$) nagu funktsioon $\kappa^{(l-1)}(t)$ nullpunktis.

THE SMOOTHNESS OF SOLUTION OF WEAKLY SINGULAR INTEGRAL EQUATION WITH A DISCONTINUOUS COEFFICIENT

We examine the differential properties of the solution of the linear integral equation

$$u(t) = \int_0^b a(t, s) \kappa(t-s) u(s) ds + f(t), \quad 0 \leq t \leq b,$$

where $\kappa \in C^{m-1}([-b, b] \setminus \{0\})$, $m \geq 1$ and, for $-b \leq t < 0$ and $0 < t \leq b$, $|\kappa^{(m-1)}(t)| \leq c|t|^{-\beta}$ is valid with $0 < \beta < m$.

It is well known (see [1-9]) that in case of $f \in C^m[0, b]$ and $a(t, s) \in C^m([0, b] \times [0, b])$ a singularity of $\kappa^{(k-1)}(t)$ ($1 \leq k \leq m$) at 0 determines the singularities of the same order of $u^{(k)}(t)$ at 0 and b .

In this paper we study a case with weaker conditions on $a(t, s)$. We assume that p is the least integer, by which the function $\frac{\partial^p}{\partial s^p} a(t, s)$ has the first kind discontinuity on the straight line $s=d$ ($0 < d < b$). We prove that, in addition to singularities at the end points, the $(p+l)$ -th derivative ($1 \leq l \leq m-p$) of the solution $u(t)$ behave at the point d as the function $\kappa^{(l-1)}(t)$ at 0.