EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1987, 36, 2
https://doi.org/10.3176/phys.math.1987.2.04

УДК 517.948; 513.88

О. ВААРМАНН

К МЕТОДАМ С АППРОКСИМАЦИЕЙ ОБОБЩЕННОГО ПСЕВДООБРАТНОГО ОПЕРАТОРА

(Представил Н. Алумяэ)

Понятие псевдообратного оператора позволяет укладывать в единые рамки различные итерационные методы, в кратком и сжатом виде сформулировать научные результаты. Для вычисления обобщенного решения нелинейного операторного уравнения в терминах обобщенной псевдоинверсии используется одно общее семейство итерационных методов, включающее в себя как частные случаи методы Гаусса—Ньютона, Бен-Израэля, Левенберга—Марквардта, а также методы с последовательной аппроксимацией обобщенной псевдоинверсии.

1. Пусть $F(x)$ — дифференцируемый оператор из одного гильбертова пространства H_1 в другое H_2, и оператор $F'(x)$ имеет замкнутый образ $R(x)=R(F'(x))$, причем его нулевое подпространство может быть нетривиальным. В силу замкнутости образа $R(x)$ существует равномерно ограниченный псевдообратный оператор $[F'(x)]^+$. Положим

$$\Phi(x)=[F'(x)U^{-1}]^+, \quad \Psi(x)=\Phi^+(x)=F'(x)U^{-1}, \tag{1}$$

где U — произвольный линейный несингулярный оператор из H_1 в себя. Через $P_{R(x)}=P_{R(\Psi(x))}$ $(P_k=P_{R(\Psi(x_k))})$ обозначим оператор ортогонального проектирования H_2 на $R(\Psi(x))$.

Для решения уравнения

$$[F'(x)]^*F(x)=0 \tag{2}$$

рассмотрим методы вида

$$x_{k+1}=x_k-\varepsilon_k A_k F(x_k), \tag{3}$$

где ε_k — релаксационный (доминирующий) параметр $0<\varepsilon_k\leqslant 1$, A_k — линейный оператор из H_2 в H_1, аппроксимирующий оператор $U^{-1}(F'(x_k)U^{-1})^+$. Согласно терминологии [1], оператор $U^{-1}(F'(x)U^{-1})^+$ можно назвать IU-взвешенным псевдообратным оператором. Введение несингулярного оператора U не имеет принципиального значения, а обусловлено удобством при рассмотрении некоторых проблем в вычислительной практике. В общем случае в качестве U допускается брать и сингулярный линейный оператор [1].

Пусть далее C, $\bar{C}$, $\bar{L}_0$, L_1, N, N', N_0, L и λ — означают некоторые положительные константы. Предположим, что $\bar{A}_k$ является аппроксимацией для $[F'(x_k)U^{-1}]^+$, т. е. $\bar{A}_k=UA_k$, и справедливы следующие соотношения

$$\bar{A}_k=\bar{A}_kP_k, \quad \|\bar{A}_k\|\leqslant\bar{\lambda}_k\leqslant\bar{\lambda}<\infty, \quad \|A_k\|\leqslant\lambda_k\leqslant\lambda<\infty. \tag{4}$$

С использованием результатов из [2] нетрудно доказать следующую лемму.

Лемма. *Пусть $F(x)$ — Липшиц непрерывен и $\Phi(x)$ — равномерно ограниченный оператор в рассматриваемой области S, т. е.*

$$\|F'(x)-F'(y)\|\leqslant L_1\|x-y\|, \quad \forall x,y\in S,$$
$$\|\Phi(x)\|\leqslant \bar{C}, \qquad \forall x\in S,$$

тогда

$$\|P_{R(x)}-P_{R(y)}\|\leqslant \bar{L}_0, \quad \forall x,y\in S, \quad \text{где} \quad \bar{L}_0=\bar{C}L_1\|U^{-1}\|.$$

Из леммы вытекает, что существуют постоянные N' и N такие, что

$$\|(P_{R(y)}-P_{R(y)}P_{R(x)})F(x)\|\leqslant N'\|x-y\|, \tag{5}$$
$$\|(P_{k+1}-P_{k+1}P_k)F(x_k)\|\leqslant \varepsilon_k N\|P_kF(x_k)\|. \tag{6}$$

Путем ввода последовательности $\{\bar{\gamma}_k\}$, определяемой по условию

$$\|P_k-\Psi(x_{(k)}\bar{A}_k\|\leqslant\bar{\gamma}_k, \quad k=0,1,\ldots, \tag{7}$$

получается

Теорема 1. *Пусть* $x_0\in H_1$, $S=\{x\in H_1 : \|x-x_0\|\leqslant\varrho\}$ *и выполнены условия:*

1° *оператор* $F(x)$ *дифференцируем (по Фреше);*

2° *производная* $F'(x)$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$\|F'(x)-F'(y)\|\leqslant L_1(\|x-y\|;$$

3° $\delta=\delta_0<1$ (δ_0 *определяется ниже в разных случаях по разному*);

4° $0<\varepsilon_0\leqslant\varepsilon_{k-1}\leqslant\varepsilon_k=\min\{1,\ \varepsilon_{k-1}\delta_{k-1}^{-1/2}\}$, $\quad \|P_{k+1}F(x_{k+1})\|\leqslant\delta_k\|P_kF(x_k)\|$.

А. *Тогда, если существует постоянное* $\bar{C}$ *такое, что* $\|\Phi(x)\|\leqslant\bar{C}$, $\bar{\gamma}_k\leqslant\bar{\gamma}_0<1$, $r_1=\lambda\|P_0F(x_0)\|/(1-\delta)\leqslant\varrho$, *то уравнение* $[F'(x)]^*F(x)=0$ *имеет в* S *решение* x^*, *к которому сходится последовательность* (3), *причем* $\|x^*-x_0\|\leqslant r_1$, $\delta_k\leqslant\delta$ *и*

$$\|x_k-x^*\|\leqslant r_1\delta^k,$$

где $\delta=\delta_0=1-\varepsilon_0+\varepsilon_0(\bar{\gamma}_0+N)+\frac{1}{2}\varepsilon_0^2\lambda^2L_1\|P_0F(x_0)\|$.

Б. *Если* $P_{R(x)}$ *не зависит от* x *и* $\bar{\gamma}\geqslant\bar{\gamma}_0\geqslant\ldots\geqslant\bar{\gamma}_k\geqslant\ldots\geqslant0$, $\bar{\gamma}_k\to0$ *при* $k\to\infty$, *то последовательность* $\{x_k\}$ *сходится со сверхлинейной скоростью, причем* $\|x^*-x_0\|\leqslant r_1$

$$\|x_k-x^*\|\leqslant r_1\prod_{i=0}^{k-1}\delta_i,$$

где $\delta_i=1-\varepsilon_i+\varepsilon_i\bar{\gamma}_i+\frac{1}{2}\varepsilon_i^2\lambda^2L_1\|P_iF(x_i)\|$ *при* $i\to\infty$. Это доказательство повторяет с необходимыми изменениями доказательство теоремы из [3]. В качестве примера этих изменений выведем здесь следующее соотношение:

$$\|[F'(x)]^*F(x)\|\leqslant\|H\|\,\|H^{-1}[F'(x)]^*F(x)\|\leqslant\|H\|\,\|U^{-1}(F'(x)U^{-1})^*F(x)\|\leqslant$$
$$\leqslant\|H\|\,\|U^{-1}(F'(x)U^{-1})^*\Psi(x)\Phi(x)F(x)\|\leqslant$$
$$\leqslant\|H\|\,\|U^{-1}(F'(x)U^{-1})^*\|\,\|P_{R(x)}F(x)\|.$$

Отсюда в силу непрерывности оператора $P_{R(x)}F(x)$ следует, что решение уравнения $P_{R(x)}F(x)=0$ является также и решением уравнения (2).

Отметим еще, что в [3–6] при выведении оценки для квадратичной скорости последовательности (3) были использованы следующие условия:

$$\|P_{R(x)}-P_{R(y)}\|\leqslant L\|x-y\|, \tag{8}$$
$$\|P_{R(y)}P_{R(x)}P_{R(y)}-P_{R(y)}P_{R(x)}\|\leqslant N_1\|x-y\|\,\|x-y\|^2. \tag{9}$$

Из выполнимости условий (8) и (9) следует, что в этом случае $P_{R(x)}$ не зависит от x, и поэтому условия сходимости для метода (3) можно записать в более простом виде.

В случае $R(x) \supseteq R(y)$ или в случае, когда $P_{R(x)}$ и $P_{R(y)}$ перестановочны, условие (9) выполняется также при $N=0$.

2. Семейство методов (3) включает в себя как частные случаи релаксационные методы типа Левенберга—Марквардта

$$x_{k+1}=x_k-\varepsilon_k D_k[F'(x_k)]^* F(x_k), \tag{10}$$

где D_k — некоторая аппроксимация для $M(x_k, \alpha_k)=[F'(x_k)]^* F'(x_k)+ +\alpha_k H$, $\alpha_k>0$, $H=U^*U$ и $A_k=D_k[F'(x_k)]^*$, так как $\lim\limits_{\alpha_k\to 0} M_k^{-1}[F'(x_k)]^* = =U^{-1}[F'(x_k)U^{-1}]^+$ [1].

Пусть $\omega_k=\mu_k/\alpha_k$ и μ_k и K некоторые постоянные, удовлетворяющие неравенствам

$$\|I-M_k D_k\| \leqslant \mu_k<1, \quad \|F'(x)\| \leqslant K,$$

тогда имеет место

Следствие. *Пусть* $x_0 \in H_1$, $S=\{x \in H_1 : \|x-x_0\| \leqslant \varrho\}$ *и на* S *выполнены условия* 1°—4° *теоремы* 1.

Если $\|\Phi(x)\| \leqslant \bar{C}$, $\alpha_k \leqslant \alpha_0$, $\omega_k \leqslant \omega_0$ $(\alpha_0, \omega_0<\infty)$, $r_1=\lambda\|P_0 F(x_0)\|/ /(1-\delta) \geqslant \varrho$, *где* $\delta=\delta_0=1-\varepsilon_0+\varepsilon_0[N+K\|U^{-1}\|(\alpha_0\bar{C}^3+\omega_0 K\|U\| H^{-1}\|)]+ +\frac{1}{2}\varepsilon_0\lambda^2 L_1\|P_0 F(x_0)\|$, *то уравнение* (2) *имеет в* S *решение* x^*, *к которому сходится последовательность* (10), *причем*

$$\|x^*-x_0\| \leqslant r_1 \quad \text{и} \quad \|x_k-x^*\| \leqslant r_1\delta^k.$$

Ниже рассмотрим некоторые способы построения оператора D_k. Пусть $D_k^{(0)}$ — некоторая аппроксимация для $M_k^{-1}=[M(x_k, \alpha_k)]^{-1}$ такая, что $\|T_k\|<1$, где $T_k=I-M_k D_k^{(0)}$ и I — тождественный оператор.

Для построения D_k можно использовать формулу

$$D_k \equiv D_k^{(q)}=D_k^{(0)}[I+T_k+\ldots+T_k^q], \quad q \geqslant 0. \tag{11}$$

В частности, в качестве $D_k^{(0)}$ можно принять $D_k^{(0)}=a_k I$, где $0<a_k<2/(K^2+\alpha\|H\|)$. В последнем случае справедливы соотношения $\|I-M_k D_k\| \leqslant \nu_k^q$, $\|A_k\| \leqslant \lambda_q$, где $\|I-a_k M_k\| \leqslant \nu_k$ и $\lambda_q = =\min\left\{\frac{2}{K}(1+\nu+\ldots+\nu^q),\ \text{и}\ \|U^{-1}\|(\bar{C}+\alpha_0\bar{C}^3+\omega_0 K\|U\|\|H^{-1}\|)\right\}$. Итак, можем положить $\mu_0=\nu^q$ и $\lambda=\lambda_q$.

При $q=1$ один эффективный способ такого типа для вычисления D_k описан в [7].

В общем случае для повышения точности аппроксимации оператора M_k^{-1} можно воспользоваться многочленами Чебышева. Образуем линейную комбинацию

$$S_k^{(q)} \equiv \sum_{i=0}^{q} a_{q,i} D_k^{(i)}, \quad q \geqslant 2, \tag{12}$$

где коэффициенты многочлена Чебышева $Q_q(x)=\sum\limits_{i=0}^{q} a_{q,i}x^i$ удовлетворяют условию $\sum\limits_{i=0}^{q} a_{q,i}=1$. Тогда

$$\|I-M_k S_k^q\| \leqslant \nu/\eta_q \leqslant 2\nu^{q+1}/(1+\sqrt{1-\nu^2})^q,$$

$$\lambda=\lambda_q=\min\left\{\frac{2}{K}(1+\nu+\ldots+\nu^q)\sum_{i=0}^{q}|a_{q,i}|,\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\|U^{-1}\|\left(\bar{C}+\alpha\bar{C}^3+\frac{\nu\eta_q}{2}K\|U\|\,\|H^{-1}\|\right)\right\},$$

где $\nu=\sup\{\nu_k\}$ и $\eta_q=1/|Q_q(1/\nu)|$.

Для построения A_k в случае $U=I$ аналогичные результаты, основанные на разложении псевдообратного оператора в ряд Неймана, получены в [4].

В конечномерном случае ($F: R^n\to R^m$) при вычислении очередного приближения x_k для решения x^* по формулам (10), (11) и (10), (12) основной операцией является переумножение матрицы на вектор, которая требует $O(mn)$ умножений, и поэтому такой подход экономен для решения задач большой размерности. В случае задач с редким якобианом число арифметических операций, требуемое для совершения одного итерационного шага, значительно сокращается.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Elden, L.* A Note on Weighted Pseudoinverses with Application to the Regularization of Fredholm Integral Equations of the First Kind. Report LitH-MAT-R-1975-11. Linköping University (Sweden), Department of Mathematics, 1975.
2. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М., «Наука», 1969.
3. *Ваарманн О., Ломп М.* Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., **31**, № 4, 410—417 (1982).
4. *Ваарманн О.* Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., **20**, № 4, 386—394 (1971).
5. *Vaarmann, O.* ENSV TA Toim. Füüs. Matem., 29. № 3, 233—240 (1980).
6. *Vaarmann, O.* ENSV TA Toim. Füüs. Matem., **27**, № 3, 251—258 (1978).
7. *Schreiber, R.* In: Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, VI (Eds R. Glowinski, J.-L. Lions). Elsevier Science Publishers B. V, (North-Holland), INRIA, 1984, 285—295.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
27/VI 1986

O. VAARMANN

ÜLDISTATUD PSEUDOPÖÖRDOPERAATORI APROKSIMEERIMISEL BASEERUVATEST MEETODITEST

Mittelineaarse operaatorvõrrandi üldistatud lahendi arvutamiseks on vaadeldud üht iteratsioonimeetodite klassi, mis erijuhul sisaldab endas Ben-Israeli, Gauss-Newtoni ja Levenberg-Marquardti meetodid, aga ka üldistatud pseudopöördoperaatori järkjärgulisel aproksimeerimisel põhinevad meetodid. Iteratsioonimeetodite koonduvuspiirkonna laiendamiseks on kasutusele võetud iteratsioonisammu pikkust reguleerivad nn. relaksatsiooniparameetrid ja toodud tingimused nende parameetrite lubatavate väärtuste hulga kohta.

O. VAARMANN

ÜBER ITERATIONSVERFAHREN MIT APPROXIMATION DES VERALLGEMEINERTEN PSEUDOINVERSEN OPERATORS

Es wird die Aufgabe der genäherten Lösung von nichtlinearen Operatorgleichungen in den Hilberträumen betrachtet. Für die Lösung einer Operatorgleichung im Sinne der kleinsten Quadrate wird eine allgemeine Klasse von Iterationsverfahren theoretisch untersucht, welche die Verfahren von Ben-Israel, Gauss—Newton und Levenberg—Marquardt, aber auch die Iterationsverfahren mit sukzessiver Approximation des verallgemeinerten pseudoinversen Operators als wesentliche Sonderfälle enthält. Zur Konvergenzverbesserung dieser Iterationsverfahren wird ein reeller Parameter für die Bestimmung der Iterationsschrittweite benutzt.