EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1987, 36, 2

УДК 518 : 517.91/94 https://doi.org/10.3176/phys.math.1987.2.02

П. ОЯ, А. РЕЙТСЕКАС

О МЕТОДАХ КОЛЛОКАЦИИ И ПОДОБЛАСТЕЙ КВАДРАТИЧЕСКИМИ И КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ ДЛЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

(Представил А. Хумал)

Устанавливают оценки погрешности с главными членами в методах коллокации и подобластей квадратическими и кубическими сплайнами для краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. В качестве вспомогательного средства выделяют главные члены интерполяции кубическими и квадратическими сплайнами в узлах сетки. Записывают линейные системы, которые приходится решить при практической реализации методов. Приводят результаты численных экспериментов.

1. Установим сначала оценки точности сплайновых интерполянт в узлах, которые будут использованы при изучении методов коллокации и подобластей.

На отрезке $[a, b]$ введем равномерное разбиение $x_i=a+ih$, $i=0, \ldots, n$, $h=(b-a)/n$. Предположим, что $f\in C^4[a, b]$. Для интерполяционного кубического сплайна S (т. е. удовлетворяющего условиям $S(x_i)=f(x_i)$, $i=0, \ldots, n$) из класса C^2 условия непрерывности S' в узлах выражаются

$$M_{i-1}+4M_i+M_{i+1}=\frac{6}{h^2}(f_{i-1}-2f_i+f_{i+1}),\quad i=1, \ldots, n-1, \tag{1}$$

где $M_i=S''(x_i)$, $f_i=f(x_i)$. Добавим еще краевые условия (здесь $f_i^{(k)}=f^{(k)}(x_i)$)

$$M_0=f''_0-\frac{1}{12}h^2f_0^{\mathrm{IV}},\qquad M_n=f''_n-\frac{1}{12}h^2f_n^{\mathrm{IV}}. \tag{2}$$

Система (1), (2) имеет единственное решение, его ищем в виде $M_i=f''_i+\alpha_ih^2f_i^{\mathrm{IV}}+\beta_i$. Разложением Тейлора приводим уравнения (1) к виду

$$(\alpha_{i-1}+4\alpha_i+\alpha_{i+1})h^2f_i^{\mathrm{IV}}+\alpha_{i-1}o(h^2)+\alpha_{i+1}o(h^2)+$$
$$+\beta_{i-1}+4\beta_i+\beta_{i+1}=-\frac{1}{2}h^2f_i^{\mathrm{IV}}+o(h^2).$$

Выберем $\alpha_i=-1/12$, тогда β_i определяются однозначно, причем $\beta_i=o(h^2)$, а если $f^{\mathrm{IV}}\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$, то $\beta_i=O(h^{2+\alpha})$.

Пусть еще $y_i=x_i+h/2$, $i=0, \ldots, n-1$. Из общеизвестного представления интерполяционного кубического сплайна (см. [1]) на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$

$$S(x)=f_i(1-t)+f_{i+1}t-\frac{h^2}{6}t(1-t)((2-t)M_i+(1+t)M_{i+1}),$$

где $x=x_i+th$, получаем

$$S'(y_i)=\frac{f_{i+1}-f_i}{h}-\frac{h}{24}(M_{i+1}-M_i).$$

При помощи соотношений $M_i=f''_i-\frac{1}{12}h^2f^{IV}_i+\beta_i$ получаем отсюда разложением по формуле Тейлора, что $S'(y_i)=f'(y_i)+\gamma_i$, где $\gamma_i=o(h^3)$, а если $f^{IV}\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$, то $\gamma_i=O(h^{3+\alpha})$. Используя, например, методику из [1], можно установить, что при условиях (2) сохраняются общеизвестные порядки приближения $\|S-f\|_\infty=O(h^4)$ и $\|S'-f'\|_\infty=O(h^3)$.

Интерполяционный квадратический сплайн S из класса C^1, удовлетворяющий условиям $S(y_i)=f(y_i)$, $i=0,\ldots,n-1$, представим для $x\in[x_i, x_{i+1}]$ в виде

$$S(x)=f_{i+1/2}+\frac{h}{8}(2t-1)\left((3-2t)S'_i+(2t+1)S'_{i+1}\right),$$

здесь $x=x_i+th$, $f_{i+1/2}=f(y_i)$, $S'_i=S'(x_i)$. Условия непрерывности S в узлах записываются

$$S'_{i-1}+6S'_i+S'_{i+1}=\frac{8}{h}(f_{i+1/2}-f_{i-1/2}),\quad i=1,\ldots,n-1. \tag{3}$$

Краевые условия

$$S(a)=f_0-\frac{h^4}{128}f^{IV}_0,\quad S(b)=f_n-\frac{h^4}{128}f^{IV}_n \tag{4}$$

дают еще уравнения

$$\begin{aligned}6S'_0+2S'_1&=\frac{16}{h}(f_{1/2}-f_0)+\frac{h^3}{8}f^{IV}_0,\\ 2S'_{n-1}+6S'_n&=\frac{16}{h}(f_n-f_{n-1/2})-\frac{h^3}{8}f^{IV}_n.\end{aligned} \tag{5}$$

Отыскивая решение системы (3), (5) в виде $S'_i=f'_i+\alpha_i h^2 f'''_i+\beta_i$, после разложения Тейлора получаем при $\alpha_i=-1/12$, что $\beta_i=o(h^3)$, а при $f^{IV}\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$, $\beta_i=O(h^{3+\alpha})$. Из равенства $S'(y_i)=\frac{1}{2}(S'_i+S'_{i+1})$ следует теперь, что $S'(y_i)=f'(y_i)+\frac{1}{24}h^2f'''(y_i)+\gamma_i$, где $\gamma_i=o(h^3)$, а если $f^{IV}\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$, то $\gamma_i=O(h^{3+\alpha})$.

Пусть теперь $M_i=S''(y_i)$, $i=0,\ldots,n-1$, где S интерполяционный квадратический сплайн с краевыми условиями (4). Используя представление S на отрезках $[x_i, x_{i+1}]$

$$S(x)=\frac{M_i}{2}(x-y_i)^2+B_i(x-y_i)+f_{i+1/2},$$

выводим из условий непрерывной дифференцируемости S в точках x_i и x_{i+1} (параметры B_i исключаются) уравнения

$$M_{i-1}+6M_i+M_{i+1}=\frac{8}{h^2}(f_{i+3/2}-2f_{i+1/2}+f_{i-1/2}),\quad i=1,\ldots,n-2. \tag{6}$$

Учитывая краевые условия (4), получаем еще

$$\begin{aligned}5M_0+M_1&=\frac{8}{h^2}(f_{3/2}-3f_{1/2}+2f_0)-\frac{h^2}{8}f_0,\\ M_{n-2}+5M_{n-1}&=\frac{8}{h^2}(2f_n-3f_{n-1/2}+f_{n-3/2})-\frac{h^2}{8}f^{IV}_n.\end{aligned} \tag{7}$$

Аналогично предыдущему, решением системы (6), (7) оказывается $M_i=$

$=f''_{i+1/2}-\dfrac{1}{24}h^2f^{\mathrm{IV}}_{i+1/2}+\beta_i$, где $\beta_i=o(h^2)$, а если $f^{\mathrm{IV}}\in\mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$, то $\beta_i=O(h^{2+\alpha})$.

Граничные условия (4) сохраняют порядок приближения $\|S-f\|_\infty=O(h^3)$, (см. [2]), это следует также из разложения Тейлора $S(x)-f(x)$ в точках y_i.

2. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned}&(Lu)(x)\equiv p(x)u''(x)+q(x)u'(x)+r(x)u(x)=f(x),\quad x\in(a,b),\\ &u(a)=\alpha,\quad u(b)=\beta.\end{aligned}\tag{8}$$

Предположим, что функции p, q, r и f достаточно гладкие и $p(x)\geqslant p>0$, $r(x)\leqslant r<0$, $x\in(a,b)$. Пусть задача (8) имеет решение $u\in C^4[a,b]$, тогда оно единственное. В методе коллокации искомый квадратический сплайн $\tilde u(x)$ как приближенное решение задачи (8) определяем условиями

$$\begin{aligned}&(L\tilde u)(y_i)=f(y_i),\quad i=0,\ldots,n-1,\\ &\tilde u(a)=\alpha,\quad \tilde u(b)=\beta.\end{aligned}\tag{9}$$

Используем квадратические B-сплайны

$$B_i(x)=\frac{1}{h^2}\begin{cases}(x-x_{i-1})^2, & x\in[x_{i-1},x_i],\\ 2h^2-(x_{i+1}-x)^2-(x-x_i)^2, & x\in[x_i,x_{i+1}],\\ (x_{i+2}-x)^2, & x\in[x_{i+1},x_{i+2}],\end{cases}$$

(вне отрезка $[x_{i-1},\ x_{i+2}]$ положим $B_i(x)=0$), при этом $B_{-1}(x)$, $B_0(x),\ldots,B_n(x)$ образуют базис в пространстве квадратических сплайнов на отрезке $[a,b]$ с узлами x_i, $i=0,\ldots,n$. Условия (9) дают для определения коэффицентов в представлении

$$\tilde u(x)=\sum_{i=-1}^{n}c_iB_i(x)$$

линейную систему (включающую уравнения $c_{-1}+c_0=\alpha$, $c_{n-1}+c_n=\beta$), которая преобразуется после исключения c_{-1} и c_n к виду

$$\begin{aligned}&\left(-6p_0+hq_0+\frac54h^2r_0\right)c_0+\left(2p_0+hq_0+\frac14h^2r_0\right)c_1=\\ &\qquad=h^2f_0-\left(2p_0-hq_0+\frac14h^2r_0\right)\alpha,\\ &\left(\frac{2p_i}{h^2}-\frac{q_i}{h}+\frac{r_i}{4}\right)c_{i-1}+\left(-\frac{4p_i}{h^2}+\frac32r_i\right)c_i+\\ &\qquad+\left(\frac{2p_i}{h^2}+\frac{q_i}{h}+\frac{r_i}{4}\right)c_{i+1}=f_i,\quad i=1,\ldots,n-2,\\ &\left(2p_{n-1}-hq_{n-1}+\frac14h^2r_{n-1}\right)c_{n-2}+\left(-6p_{n-1}-hq_{n-1}+\frac54h^2r_{n-1}\right)c_{n-1}=\\ &\qquad=h^2f_{n-1}-\left(2p_{n-1}+hq_{n-1}+\frac14h^2r_{n-1}\right)\beta,\end{aligned}\tag{10}$$

здесь $p_i=p(y_i)$, $q_i=q(y_i)$, $r_i=r(y_i)$, $f_i=f(y_i)$. При малых h система (10) однозначно разрешима из-за преобладания главной диагонали ее матрицы.

Решению $u(x)$ задачи (8) построим интерполирующий квадратический сплайн $\bar u(x)$ при краевых условиях

$$\bar{u}(a)=u(a)-\frac{h^4}{128}u^{\mathrm{IV}}(a),\quad \bar{u}(b)=u(b)-\frac{h^4}{128}u^{\mathrm{IV}}(b),$$

который имеет представление

$$\bar{u}(x)=\sum_{i=-1}^{n}\bar{c}_iB_i(x).$$

Поскольку $L(\tilde{u}-\bar{u})(y_i)=p_i(u''(y_i)-\bar{u}''(y_i))+q_i(u'(y_i)-\bar{u}'(y_i))$ и $(c_{-1}-\bar{c}_{-1})+(c_0-\bar{c}_0)=\frac{h^4}{128}u^{\mathrm{IV}}(a)$, $(c_{n-1}-\bar{c}_{n-1})+(c_n-\bar{c}_n)=\frac{h^4}{128}u^{\mathrm{IV}}(b)$, то для определения $c_i-\bar{c}_i$, $i=0,\ldots,n-1$, получаем систему с матрицей системы (10) и правой частью

$$h^2(p_0(u''(y_0)-\bar{u}''(y_0))+q_0(u'(y_0)-\bar{u}'(y_0)))-$$
$$-\frac{h^4}{128}\left(2p_0-hq_0+\frac{1}{4}h^2r_0\right)u^{\mathrm{IV}}(a),$$
$$p^i(u''(y_i)-\bar{u}''(y_i))+q_i(u'(y_i)-\bar{u}'(y_i)),\quad i=1,\ldots,n-2,$$
$$h^2(p_{n-1}(u''(y_{n-1})-\bar{u}''(y_{n-1}))+q_{n-1}(u'(y_{n-1})-\bar{u}'(y_{n-1})))-$$
$$-\frac{h^4}{128}\left(2p_{n-1}+hq_{n-1}+\frac{1}{4}h^2r_{n-1}\right)u^{\mathrm{IV}}(b).$$

В этой системе после умножения первого и последнего уравнений на достаточно большое число и деления внутренних уравнений (при $i=1,\ldots$ $\ldots,n-2$) на $2r_i$ соответственно главная диагональ матрицы будет преобладать с разностью 1. Это позволяет получить оценку для $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}|c_i-\bar{c}_i|$ через правые части, а затем, учитывая, что $\sum\limits_{i=-1}^{n}B_i(x)=2$, $x\in[a,b]$, и для $\|\tilde{u}-\bar{u}\|_\infty$. Поскольку $\|\bar{u}-u\|_\infty=O(h^3)$, то окончательно получаем

$$\|\tilde{u}-u\|_\infty\leqslant\frac{h^2}{24}\max_{1\leqslant i\leqslant n-2}\left|\frac{(pu^{\mathrm{IV}}-qu''')(y_i)}{r(y_i)}\right|+R, \tag{11}$$

где $R=o(h^2)$, а если $u^{\mathrm{IV}}\in\mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$, то $R=O(h^{2+\alpha})$.

3. В методе подобластей квадратическими сплайнами приближенное решение $\tilde{u}(x)$ определяем из условий

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}(L\tilde{u}-f)(x)\,dx=0,\quad i=0,\ldots,n-1,$$
$$\tilde{u}(a)=\alpha;\quad \tilde{u}(b)=\beta. \tag{12}$$

Это ведет к системе для определения коэффициентов c_i в представлении $\tilde{u}(x)$ через квадратические B-сплайны $B_i(x)$:

$$\left(-\frac{6p_0}{h^2}-\frac{p''_0}{4}+\frac{q_0}{h}-\frac{q'_0}{2}+r_0+\beta_0\right)c_0+$$
$$+\left(\frac{2p_0}{h^2}+\frac{p''_0}{12}+\frac{q_0}{h}+\frac{q'_0}{6}+\frac{r_0}{3}+\gamma_0\right)c_1=$$
$$=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_1}f(x)\,dx-\left(\frac{2p_0}{h^2}+\frac{p''_0}{12}-\frac{q_0}{h}+\frac{q'_0}{6}+\frac{r_0}{3}\right)\alpha,$$

$$\left(\frac{2p_i}{h^2}+\frac{p''_i}{12}-\frac{q_i}{h}+\frac{q'_i}{6}+\frac{r_i}{3}+\alpha_i\right)c_{i-1}+$$

$$+\left(-\frac{4p_i}{h^2}-\frac{p''_i}{6}-\frac{q'_i}{3}+\frac{4}{3}r_i+\beta_i\right)c_i+$$

$$+\left(\frac{2p_i}{h^2}+\frac{p''_i}{12}+\frac{q_i}{h}+\frac{q'_i}{6}+\frac{r_i}{3}+\gamma_i\right)c_{i+1}= \tag{13}$$

$$=\frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx, \quad i=1,\ \dots,\ n-2,$$

$$\left(\frac{2p_{n-1}}{h^2}+\frac{p''_{n-1}}{12}-\frac{q_{n-1}}{h}+\frac{q'_{n-1}}{6}+\frac{r_{n-1}}{3}+\alpha_{n-1}\right)c_{n-2}+$$

$$+\left(-\frac{6p_{n-1}}{h^2}-\frac{p''_{n-1}}{4}-\frac{q_{n-1}}{h}-\frac{q'_{n-1}}{2}+r_{n-1}+\beta_{n-1}\right)c_{n-1}=$$

$$=\frac{1}{h}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx-\left(\frac{2p_{n-1}}{h^2}+\frac{p''_{n-1}}{12}+\frac{q_{n-1}}{h}+\frac{q'_{n-1}}{6}+\frac{r_{n-1}}{3}\right)\beta,$$

где α_i, β_i, γ_i имеют порядок $O(h)$. Учитывая, что $\int_{x_i}^{x_{i+1}} L(\tilde{u}-\bar{u})(x)\,dx=$ $=\int_{x_i}^{x_{i+1}} L(u-\bar{u})(x)\,ds$, $i=0,\ \dots,\ n-1$, получаем, что система с неизвестными $c_i-\bar{c}_i$, $i=0,\ \dots,\ n-1$, с матрицей системы (13) имеет свободные члены

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_1} L(u-\bar{u})(x)\,dx-\frac{h^4}{128}\left(\frac{2p_0}{h^2}+\frac{p''_0}{12}-\frac{q_0}{h}+\frac{q'_0}{6}+\frac{r_0}{3}\right)u^{\mathrm{IV}}(a),$$

$$\frac{1}{h}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)\,(u''(x)-\bar{u}''(x))\,dx+\int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)\,(u'(x)-\bar{u}'(x))\,dx+\right.$$

$$\left.+\int_{x_i}^{x_{i+1}} r(x)\,(u(x)-\bar{u}(x))\,dx\right), \quad i=1,\ \dots,\ n-2,$$

$$\frac{1}{h}\int_{x_{n-1}}^{x_n} L(u-\bar{u})(x)\,dx-\frac{h^4}{128}\left(\frac{2p_{n-1}}{h^2}+\frac{p''_{n-1}}{12}+\frac{q_{n-1}}{h}+\frac{q'_{n-1}}{6}+\frac{r_{n-1}}{3}\right)u^{\mathrm{IV}}(b).$$

Удобную систему для оценок получаем после умножения крайних уравнений на h и деления внутренних на $2r_i$, это ведет в преобладанию главной диагонали с разностью $1+O(h)$ при малых h. Так как $|u(x)-\bar{u}(x)|=O(h^3)$, то $\int_{x_i}^{x_{i+1}} r(x)\,(u(x)-\bar{u}(x))\,dx=O(h^4)$. Опираясь на разложения Тейлора

$$p(x)=p_i+p'_i(x-y_i)+\frac{p''_i}{2}(x-y_i)^2+o(h^2),$$

$$q(x)=q_i+q'_i(x-y_i)+O(h^2),$$

а также на оценки $u'(y_i)-\bar{u}'(y_i)$, $u''(y_i)-\bar{u}''(y_i)$, приведенные в пункте 1, получаем, что

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)\,(u'(x)-\bar{u}'(x))\,dx=o(h^3),$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)\,(u''(x)-\bar{u}''(x))\,dx=\frac{h^3}{12}\,(p_i u^{\mathrm{IV}}(y_i)+p'_i u'''(y_i))+o(h^3).$$

Это дает в итоге

$$\|\tilde{u}-u\|_\infty\leqslant\frac{h^2}{12}\max_{1\leqslant i\leqslant n-2}\left|\frac{(pu''')'(y_i)}{r(y_i)}\right|+R, \tag{14}$$

где $R=o(h^2)$, а если $u^{\mathrm{IV}}\in\mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$, то $R=O(h^{2+\alpha})$.

Отметим, что при практическом решении системы (13) достаточно использовать при $i=1,\ \ldots,\ n-2$ разложения

$$\alpha_i=\frac{p^{\mathrm{IV}}{}_i}{960}h^2-\frac{q''{}_i}{24}h+\frac{q'''{}_i}{240}h^2-\frac{r'{}_i}{12}h+\frac{r''{}_i}{60}h^2+\bar{\alpha}_i,$$

$$\beta_i=-\frac{p^{\mathrm{IV}}{}_i}{480}h^2-\frac{q'''{}_i}{120}h^2+\frac{r''{}_i}{20}h^2+\bar{\beta}_i,$$

$$\gamma_i=\frac{p^{\mathrm{IV}}{}_i}{960}h^2+\frac{q''{}_i}{24}h+\frac{q'''{}_i}{240}h^2+\frac{r'{}_i}{12}h+\frac{r''{}_i}{60}h^2+\bar{\gamma}_i,$$

где $\bar{\alpha}_i$, $\bar{\beta}_i$, $\bar{\gamma}_i$ имеют порядок $O(h^3)$, при этом членами β_0, γ_0, $\bar{\alpha}_i$, $\bar{\beta}_i$, $\bar{\gamma}_i$, α_{n-1}, β_{n-1} можно пренебречь.

4. Метод коллокации кубическим сплайном $\tilde{u}(x)$ в качестве приближенного решения состоит в его определении условиями

$$\begin{aligned}&(L\tilde{u})\,(x_i)=f(x_i),\quad i=0,\ \ldots,\ n,\\&\tilde{u}(a)=\alpha,\quad \tilde{u}(b)=\beta.\end{aligned} \tag{15}$$

Кубические B-сплайны выбираем в виде

$$B_i(x)=\frac{1}{h^3}\begin{cases}(x-x_{i-2})^3, & x\in[x_{i-2},x_{i-1}],\\ h^3+3h^2(x-x_{i-1})+3h(x-x_{i-1})^2-3(x-x_{i-1})^3, & x\in[x_{i-1},x_i],\\ 4h_3-6h(x-x_i)^2+3(x-x_i)^3, & x\in[x_i,x_{i+1}],\\ (x_{i+2}-x)^3, & x\in[x_{i+1},x_{i+2}],\end{cases}$$

причем $B_i(x)=0$ вне отрезка $[x_{i-2},\ x_{i+2}]$. Сплайны $B_i(x)$, $i=-1,\ \ldots$ $\ldots,\ n+1$, образуют базис в пространстве кубических сплайнов на отрезке $[a,b]$ с узлами x_i, $i=0,\ \ldots,\ n$. Коэффициенты в представлении

$$\tilde{u}(x)=\sum_{i=-1}^{n+1}c_iB_i(x)$$

определяются условиями (15). Это ведет к системе, которую приводим к виду

$$\begin{gathered}\left(-\frac{36p_0}{h^2}+\frac{12q_0}{h}\right)c_0+\frac{6q_0}{h}c_1=f_0-\left(\frac{6p_0}{h^2}-\frac{3q_0}{h}+r_0\right)\alpha,\\ \left(\frac{6p_i}{h^2}-\frac{3q_i}{h}+r_i\right)c_{i-1}+\left(-\frac{12p_i}{h^2}+4r_i\right)c_i+\\ +\left(\frac{6p_i}{h^2}+\frac{3q_i}{h}+r_i\right)c_{i+1}=f_i,\quad i=1,\ \ldots,\ n-1,\end{gathered} \tag{16}$$

$$-\frac{6q_n}{h}c_{n-1}+\left(-\frac{36p_n}{h^2}-\frac{12q_n}{h}\right)c_n=f_n-\left(\frac{6p_n}{h^2}+\frac{3q_n}{h}+r_n\right)\beta,$$

где $p_i=p(x_i)$, $q_i=q(x_i)$, $r_i=r(x_i)$, $f_i=f(x_i)$. Матрица системы (16) имеет при малых h преобладающую главную диагональ.

Здесь построим решению $u(x)$ задачи (8) интерполирующий кубический сплайн $\bar{u}(x)$, удовлетворяющий краевым условиям $\bar{u}''(a)=u''(a)-\frac{h^2}{12}u^{\mathrm{IV}}(a)$, $\bar{u}''(b)=u''(b)-\frac{h^2}{12}u^{\mathrm{IV}}(b)$. Рассмотрим и его представление

$$\bar{u}(x)=\sum_{i=-1}^{n+1}\bar{c}_iB_i(x).$$

В данном случае $c_i-\bar{c}_i$, $i=0,\ \dots,\ n-1$, удовлетворяют системе с матрицей системы (16) и правой частью $p_i(u''(x_i)-\bar{u}''(x_i))+q_i(u'(x_i)-\bar{u}'(x_i))$, $i=0,\ \dots,\ n$. Так как $u'(x_i)-\bar{u}'(x_i)=O(h^3)$ и $u''(x_i)-\bar{u}''(x_i)=\frac{1}{12}h^2u^{\mathrm{IV}}(x_i)+o(h^2)$, то получаем оценку

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n}|c_i-\bar{c}_i|\leqslant\frac{1}{6}\cdot\frac{h^2}{12}\max_{1\leqslant i\leqslant n-1}\left|\frac{(pu^{\mathrm{IV}})(x_i)}{r(x_i)}\right|+R_1,$$

где $R_1=o(h^2)$. Тогда, поскольку $\sum_{i=-i}^{n+1}B_i(x)=6,\ x\in[a,b]$, имеем

$$\max_{x_1\leqslant x\leqslant x_{n-1}}|\tilde{u}(x)-\bar{u}(x)|\leqslant\frac{h^2}{12}\max_{1\leqslant i\leqslant n-1}\left|\frac{(pu^{\mathrm{IV}})(x_i)}{r(x_i)}\right|+R_1.$$

Опираясь на разложение Тейлора и равенства $c_{-1}+4c_0+c_1=\alpha$, $\bar{c}_{-1}+4\bar{c}_0+\bar{c}_1=\alpha$, получаем при $x\in(x_0,\ x_1)$

$$\tilde{u}(x)-\bar{u}(x)=t((c_0-\bar{c}_0)(12-18t+7t^2)+(c_1-\bar{c}_1)(6-2t^2)+(c_2-\bar{c}_2)t^2),$$

где $t=(x-x_0)/h$. Отсюда

$$\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_1}|\tilde{u}(x)-\bar{u}(x)|\leqslant 6\max_{0\leqslant i\leqslant 2}|c_i-\bar{c}_i|.$$

Уже из соображений симметрии ясно, что аналогичная оценка имеет место и на отрезке $[x_{n-1},\ x_n]$. Таким образом, в итоге получена оценка

$$\|\tilde{u}-u\|_\infty\leqslant\frac{h^2}{12}\max_{1\leqslant i\leqslant n-1}\left|\frac{(pu^{\mathrm{IV}})(x_i)}{r(x_i)}\right|+R, \tag{17}$$

где $R=o(h^2)$, а если $u^{\mathrm{IV}}\in\mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$, то $R=O(h^{2+\alpha})$.

5. В методе подобластей на кубический сплайн $\tilde{u}(x)$ наложим условия

$$\int_{y_{i-1}}^{y_i}(L\tilde{u}-f)(x)\,dx=0,\ i=1,\ \dots,\ n-1,\ \tilde{u}(a)=\alpha,\ \tilde{u}(b)=\beta, \tag{18}$$

а также

$$\int_{x_0}^{y_0}(L\tilde{u}-f)(x)\,dx=0,\quad\int_{y_{n-1}}^{x_n}(L\tilde{u}-f)(x)\,dx=0. \tag{19}$$

Отметим, что вместо условий (19) можно взять и условия

$$\int_{x_0}^{x_1} (L\tilde{u}-f)(x)\,dx=0, \quad \int_{x_{n-1}}^{x_n} (L\tilde{u}-f)(x)\,dx=0,$$

что не ведет к принципиальным изменениям.

Условия (18), (19) запишем, используя разложения Тейлора функций p, q и r в точках x_i, это ведет к системе с пятидиагональной матрицей для определения c_i, $i=-1, \ldots, n+1$:

$$c_{-1}+4c_0+c_1=\alpha,$$

$$\left(\frac{9}{4}\frac{p_0}{h^2}+\frac{1}{2}\frac{p'_0}{h}+\frac{5}{64}p''_0-\frac{7}{8}\frac{q_0}{h}-\frac{11}{64}q'_0+\frac{15}{64}r_0\right)c_{-1}+$$
$$+\left(-\frac{15}{4}\frac{p_0}{h^2}-\frac{3}{4}\frac{p'_0}{h}-\frac{7}{64}p''_0-\frac{9}{8}\frac{q_0}{h}-\frac{23}{64}q'_0+\frac{115}{64}r_0\right)c_0+$$
$$+\left(\frac{3}{4}\frac{p_0}{h^2}-\frac{1}{64}p''_0+\frac{15}{8}\frac{q_0}{h}+\frac{31}{64}q'_0+\frac{61}{64}r_0\right)c_1+$$
$$+\left(\frac{3}{4}\frac{p_0}{h^2}+\frac{1}{4}\frac{p'_0}{h}+\frac{3}{64}p''_0+\frac{1}{8}\frac{q_0}{h}+\frac{3}{64}q'_0+\frac{1}{64}r_0\right)c_2=$$
$$=\beta_0c_{-1}+\gamma_0c_0+\delta_0c_1+\eta_0c_2+\frac{1}{h}\int_{x_0}^{y_0} f(x)\,dx,$$

$$\left(\frac{3}{4}\frac{p_i}{h^2}-\frac{1}{4}\frac{p'_i}{h}+\frac{3}{64}p''_i-\frac{1}{8}\frac{q_i}{h}+\frac{3}{64}q'_i+\frac{1}{64}r_i\right)c_{i-2}+$$
$$+\left(3\frac{p_i}{h^2}+\frac{1}{2}\frac{p'_i}{h}+\frac{1}{16}p''_i-\frac{11}{4}\frac{q_i}{h}+\frac{5}{16}q'_i+\frac{19}{16}r_i\right)c_{i-1}+$$
$$+\left(-\frac{15}{2}\frac{p_i}{h^2}-\frac{7}{32}p''_i-\frac{23}{32}q'_i+\frac{115}{32}r_i\right)c_i+$$
$$+\left(3\frac{p_i}{h^2}-\frac{1}{2}\frac{p'_i}{h}+\frac{1}{16}p''_i+\frac{11}{4}\frac{q_i}{h}+\frac{5}{16}q'_i+\frac{19}{16}r_i\right)c_{i+1}+$$
$$+\left(\frac{3}{4}\frac{p_i}{h^2}+\frac{1}{4}\frac{p'_i}{h}+\frac{3}{64}p''_i+\frac{1}{8}\frac{q_i}{h}+\frac{3}{64}q'_i+\frac{1}{64}r_i\right)c_{i+2}=$$
$$=\alpha_ic_{i-2}+\beta_ic_{i-1}+\gamma_ic_i+\delta_ic_{i+1}+\eta_ic_{i+2}+\frac{1}{h}\int_{y_{i-1}}^{y_i} f(x)\,dx, \quad i=1, \ldots, n-1,$$

$$\left(\frac{3}{4}\frac{p_n}{h^2}-\frac{1}{4}\frac{p'_n}{h}+\frac{3}{64}p''_n-\frac{1}{8}\frac{q_n}{h}+\frac{3}{64}q'_n+\frac{1}{64}r_n\right)c_{n-2}+$$
$$+\left(\frac{3}{4}\frac{p_n}{h^2}-\frac{1}{64}p''_n-\frac{15}{8}\frac{q_n}{h}+\frac{31}{64}q'_n+\frac{61}{64}r_n\right)c_{n-1}+$$
$$+\left(-\frac{15}{4}\frac{p_n}{h^2}+\frac{3}{4}\frac{p'_n}{h}-\frac{7}{64}p''_n+\frac{9}{8}\frac{q_n}{h}-\frac{23}{64}q'_n+\frac{115}{64}r_n\right)c_n+$$
$$+\left(\frac{9}{4}\frac{p_n}{h^2}-\frac{1}{2}\frac{p'_n}{h}+\frac{5}{64}p''_n+\frac{7}{8}\frac{q_n}{h}-\frac{11}{64}q'_n+\frac{15}{64}r_n\right)c_{n+1}=$$
$$=\alpha_nc_{n-2}+\beta_nc_{n-1}+\gamma_nc_n+\delta_nc_{n+1}+\frac{1}{h}\int_{y_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx,$$

$$c_{n-1}+4c_n+c_{n+1}=\beta,$$

где α_i, β_i, γ_i, δ_i, $\eta_i=O(h)$. После исключения из этой системы c_{-1} и c_{n+1} получаем при малых h диагональное преобладание с разностью

$6 \min\limits_{2\leqslant i\leqslant n-2} |r_i|+O(h)$. Система, связывающая $c_i-\bar{c}_i$, $i=0, \ldots, n$, после умножения первого и последнего уравнений на h (при малых h это не нарушает разности диагонального преобладания) имеет в качестве правой части вектор

$$\int\limits_{x_0}^{y_0} L(u-\bar{u})(x)\,dx, \quad \frac{1}{h}\int\limits_{y_{i-1}}^{y_i} L(u-\bar{u})(x)\,dx, \quad i=1, \ldots, n-1,$$

$$\int\limits_{y_{n-1}}^{x_n} L(u-\bar{u})(x)\,dx.$$

Учитывая то, что $|u(x)-\bar{u}(x)|=O(h^4)$, $|u'(x)-\bar{u}'(x)|=O(h^3)$ и $|u''(x)-\bar{u}''(x)|=O(h^2)$, первый и последний компоненты этого вектора оцениваются через $O(h^3)$. В интеграле $\int\limits_{y_{i-1}}^{y_i} L(u-\bar{u})(x)\,dx$ в оценке нуждается лишь часть $\int\limits_{y_{i-1}}^{y_i} p(x)(u''(x)-\bar{u}''(x))\,dx$, остальная имеет порядок $O(h^4)$. В свою очередь разложение $p(x)=p_i+p'_i(x-x_i)+O(h^2)$ позволяет здесь оценивать только (остальное имеет порядок $O(h^4)$) $\int\limits_{y_{i-1}}^{y_i} p_i(u''(x)-\bar{u}''(x))\,dx=p_i(u'(x)-\bar{u}'(x))\Big|_{y_{i-1}}^{y_i}$. По пункту 1, это имеет порядок $o(h^3)$, а если $u^{\mathrm{IV}}\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$, то $O(h^{3+\alpha})$. Таким образом, получаем оценку для $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}|c_i-\bar{c}_i|$, значит, и для $\max\limits_{x_1\leqslant x\leqslant x_{n-1}}|\tilde{u}(x)-\bar{u}(x)|$. На весь отрезок $[a, b]$ оценка распространяется как и в конце пункта 4. Этот прием не зависит от метода решения краевой задачи. В общем счете установлена оценка

$$\|\tilde{u}-u\|_\infty=o(h^2),$$

а если $u^{\mathrm{IV}}\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$, то

$$\|\tilde{u}-u\|_\infty=O(h^{2+\alpha}).$$

6. Оценки (11), (14) и (17) показывают, что по малости погрешности нельзя отдать предпочтение ни одному из методов коллокации квадратическими и кубическими сплайнами или подобластей квадратическими сплайнами. Для подтверждения такого теоретического заключения приведем конкретные примеры. Они были реализованы на языке ФОРТРАН с двойной точностью, вычисления проведены на ЭВМ ЕС-1060.

Во всех примерах задача рассматривалась на отрезке $[0, 1]$, расчеты проведены при $n=10$, 20, 40, 80, 160. Вместо $\|\tilde{u}-u\|_\infty$ мы вычисляли $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant 10n}|\tilde{u}(z_i)-u(z_i)|$, где $z_i=ih/10$. Численные результаты приведены в следующем порядке: метод коллокации квадратическими сплайнами, метод подобластей квадратическими сплайнами, метод коллокации кубическими сплайнами.

Пример 1 (см. [3]). Задача $u''-4u=4\cosh 1$, $u(0)=u(1)=0$ имеет точное решение $u(x)=\cosh(2x-1)-\cosh 1$. Результаты вычислений для этого примера приведены в табл. 1, в последней строке добавлены погрешности метода подобластей кубическими сплайнами. Главные члены теоретических оценок следующие: $\frac{h^2}{24}\left\|\frac{pu^{\mathrm{IV}}}{r}\right\|=\frac{e+e^{-1}}{12}h^2$ (метод коллокации квадратическими сплайнами),

$\frac{h^2}{12}\left\|\frac{pu^{IV}}{r}\right\|=\frac{e+e^{-1}}{6}h^2$ (методы подобластей квадратическими сплайнами и коллокации кубическими сплайнами).

Таблица 1

0.638E—3	0.159E—3	0.397E—4	0.992E—5	0.248E—5
0.127E—2	0.318E—3	0.794E—4	0.198E—4	0.496E—5
0.127E—2	0.318E—3	0.794E—4	0.198E—4	0.496E—5
0.603E—5	0.390E—6	0.247E—7	0.156E—8	0.977E—10

Пример 2. Здесь $p(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $q(x)=0$; $r(x)=\frac{-20}{11(1+x^2)}$, $f(x)=\frac{-x^5}{33(1+x^2)}$, $\alpha=0$, $\beta=0{,}805$, точное решение задачи $u(x)=$ $=\frac{x^5}{60}+\frac{11x^3}{60}+0{,}605x$. Главные члены теоретических оценок: $\frac{h^2}{24}\left\|\frac{pu^{IV}}{r}\right\|=\frac{0{,}55}{12}h^2$ (метод коллокации квадратическими сплайнами), $\frac{h^2}{12}\left\|\frac{(pu''')'}{r}\right\|=\frac{0{,}055}{12}h^2$ (метод подобластей квадратическими сплайнами), $\frac{h^2}{12}\left\|\frac{pu^{IV}}{r}\right\|=\frac{1{,}1}{12}h^2$ (метод коллокации кубическими сплайнами). Численные результаты приведены в табл. 2, где в третьей строке добавлены погрешности метода подобластей квадратическими сплайнами, полученные при решении системы (13) с приближенно вычисленной матрицей, учитывая замечание в конце пункта 3.

Таблица 2

0.567E—4	0.128E—4	0.301E—5	0.730E—6	0.180E—6
0.191E—4	0.313E—5	0.594E—6	0.126E—6	0.286E—7
0.180E—4	0.291E—5	0.582E—6	0.125E—6	0.286E—7
0.907E—4	0.227E—4	0.566E—5	0.141E—5	0.354E—6

Пример 3. Возьмем $p(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $q(x)=\frac{x-4}{1+x^2}$, $r(x)=\frac{x^2-2}{1+x^2}$, $f(x)=\frac{x^7+133x^5-620x^3+1390x}{600(1+x^2)}$, $\alpha=2{,}6$, $\beta=941/600$, тогда решением задачи является $u(x)=\frac{1}{600}x^5+\frac{13}{60}x^3+\frac{1}{30}x^2-\frac{77}{60}x+\frac{13}{5}$. В методе подобластей решена система (13) с приближенной матрицей, имея в виду указание в конце пункта 3. Главные члены теоретических оценок здесь $\frac{h^2}{24}\left\|\frac{pu^{IV}-qu'''}{r}\right\|=\frac{11}{60}h^2$ (метод коллокации кубическими сплайнами), $\frac{h^2}{12}\left\|\frac{(pu''')'}{r}\right\|=\frac{1}{10}h^2$ (метод подобластей квадратическими сплайнами), $\frac{h^2}{12}\left\|\frac{pu^{IV}}{r}\right\|=\frac{1}{60}h^2$ (метод коллокации кубическими сплайнами). Погрешности приведены в табл. 3.

Таблица 3

0.194E—3	0.470E—4	0.116E—4	0.287E—5	0.716E—6
0.164E—3	0.398E—4	0.981E—5	0.243E—5	0.605E—6
0.776E—5	0.193E—5	0.482E—6	0.121E—6	0.301E—7

7. Метод коллокации кубическими сплайнами на равномерной сетке для решения краевых задач рассмотрен в [4], оценка погрешности порядка $O(h^2)$ получена в [5]. Такую оценку выводят и в [1], где проведено также исследование случая неравномерной сетки и возможности выбора узлов для повышения порядка точности. В [6] на неравномерной сетке получены оценки погрешности значений и производных в дискретных равномерных нормах. Сравнение методов коллокации квадратическими и кубическими сплайнами имеется в [7], однако полученные оценки содержат в главных членах бо́льшие множители, чем у нас и не отражают столь точно их зависимости от коэффициентов дифференциального уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. М., «Наука», 1980.
2. *Квасов Б. И.* Интерполяция квадратическими сплайнами. Ин-т теор. и прикл. мех. СО АН СССР. Препр., № 3, 1981.
3. *Ciarlet, P. G., Schultz, M. H., Varga, R. S.* Numer. Math., **9**, 394—430 (1967).
4. *Albasiny, E. L., Hoskins, W. D.* Comput. J., **12**, 151—153 (1969).
5. *Ahlberg, J. H., Ito, T.* Math. Comput., **29**, 761—776 (1975).
6. *Ильин В. П.* Ж. вычисл. мат. и мат. физ., **18**, 620—627 (1978).
7. *Khalifa, A. K. A., Eilbeck, J. C.* IMA J. Numer. Anal., **2**, 111—121 (1982).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию
19/III 1986

P. OJA, A. REITSEKAS

RUUT- JA KUUPSPLAINIDEGA KOLLOKATSIOONI- JA OSAPIIRKONDADE MEETODIST RAJAÜLESANNETE LAHENDAMISEL

On leitud pealiikmetega veahinnangud, mis näitavad kuupsplainidega osapiirkondade meetodi suuremat koonduvuskiirust, võrreldes ruut- ja kuupsplainidega kollokatsioonimeetodi ja ruutsplainidega osapiirkondade meetodiga, kusjuures viimastest meetoditest ei saa ühtegi eelistada. Seda kinnitavad konkreetsete näiteülesannete lahendamise tulemused.

P. OJA, A. REITSEKAS

ON THE COLLOCATION AND SUBREGIONS METHODS WITH THE QUADRATIC AND CUBIC SPLINES FOR THE BOUNDARY VALUE PROBLEMS

We consider the numerical solution of two-point boundary value problems (8), using the collocation and subregions methods (9), (12) with quadratic and (15), (18), (19) with cubic splines. The bounds of error (11), (14), (17) show that we cannot prefer some of the methods (9), (12), (15), but the rate of convergence for subregions method (18), (19) is higher compared with the others. We give three examples where the numerical tests support the theoretical results.