EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1986, 35, 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1986.2.15

УДК 534.22 : 539.3

А. СТУЛОВ

О ВОЗМОЖНОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ СТАЦИОНАРНОГО ПРОФИЛЯ В НЕЛИНЕЙНОМ СТАНДАРТНОМ ВЯЗКОУПРУГОМ ТЕЛЕ

A. STULOV. STATSIONAARSE PROFIILIGA ÜHEMÕÕTMELISE AKUSTILISE LAINE LEVI VÕIMALIKKUSEST MITTELINEAARSES STANDARDSES VISKOELASTSES KESKKONNAS

A. STULOV. ON THE ONE-DIMENSIONAL ACOUSTIC WAVE OF A CONSTANT PROFILE PROPAGATION IN NONLINEAR STANDARD VISCOELASTIC MEDIUM

(Представил Н. Алумяэ)

Существование волн, распространяющихся в нелинейных средах без изменения формы и скорости, известно давно, и они достаточно подробно описаны, например, в монографиях [1, 2]. Такие же волны в нелинейных наследственных средах изучены меньше. В [3] показана возможность существования в нелинейной наследственной среде волн стационарного профиля, движущихся со скоростью, равной скорости звука в линейной среде, а в [4], движущихся с большей скоростью.

Нами исследуются условия существования и форма волн стационарного профиля, скорость которых зависит от амплитуды.

Рассмотрим одномерный нелинейный волновой процесс, зависящий от лангранжевой координаты X, времени t, описываемый уравнением

$$U^{\cdot\cdot}(X,t)-c^2g(U')U''(X,t)+\int_0^t K(\tau)U^{\cdot\cdot}(X,t-\tau)\,d\tau=0, \tag{1}$$

и краевую задачу с условием

$$U^{\cdot}(0,t)=-cAH(t)\varphi(t),\quad A=\mathrm{const}, \tag{2}$$

где $U(X,t)$ — продольные перемещения, $g(U')$ — функция нелинейности среды, $K(\tau)$ — ядро ползучести наследственной среды, c — скорость звука в среде, $H(t)$ — функция Хевисайда, $\varphi(t)$ — гладкая функция. Штрих обозначает производную по X, а точка — производную по t.

Выберем нулевые начальные условия

$$U(X,0)=0,\qquad U^{\cdot}(X,0)=0, \tag{3}$$

и функцию нелинейности в виде

$$g(U')=1+\alpha U'(X,t),\qquad \alpha=\mathrm{const}. \tag{4}$$

Решение задачи (1), (2) будем искать в виде

$$U(X,t)=H(\xi)\psi(\xi),\qquad \xi=\frac{1}{2\tau_0}\left(t-\frac{X}{V}\right), \tag{5}$$

т. е. волны, вызванной краевым воздействием в точке $X=0$ и распространяющейся со скоростью V в положительном направлении оси X.

Введенный в формулу (5) параметр τ_0 имеет размерность времени и будет определен ниже.

Функция $\psi(\xi)$ удовлетворяет условиям

$$|\psi^{\cdot}(\xi)|<\infty, \quad \psi(0)=0, \quad \psi^{\cdot}(0)=B=\mathrm{const}. \tag{6}$$

Обозначим

$$1-\frac{c^2}{V^2}=a\varepsilon, \quad \beta=\frac{\alpha c^2}{2\tau_0\varepsilon V^3}, \tag{7}$$

и выберем $B=-a/\beta$. Тогда, подставляя (5) в (1), для $\xi>0$ получим уравнение

$$a\varepsilon\psi^{\cdot\cdot}(\xi)+\beta\varepsilon\psi^{\cdot}(\xi)\psi^{\cdot\cdot}(\xi)+2\tau_0 BK(2\tau_0\xi)+2\tau_0\int\limits_0^{\xi}K[2\tau_0(\xi-z)]\psi^{\cdot\cdot}(z)\,dz=0. \tag{8}$$

Рассмотрим случай стандартного вязкоупругого тела, для которого

$$K(t-\tau)=(\varepsilon/\tau_0)\exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_0}\right), \tag{9}$$

где $\varepsilon>0$ и $\tau_0>0$ — наследственные параметры среды. Обозначив $\beta\psi^{\cdot}(\xi)=W(\xi)$, получим уравнение

$$W^{\cdot}(\xi)e^{2\xi}[a+W(\xi)]-2a+2\int\limits_0^{\xi}e^{2z}W^{\cdot}(z)\,dz=0. \tag{10}$$

Дифференцируя уравнение (10) по ξ, а затем дважды интегрируя и учитывая, что $W(0)=-a$, найдем

$$\left[\frac{W(\xi)+W_1}{W_1-a}\right]^p\left[\frac{W(\xi)+W_2}{W_2-a}\right]^{1-p}=\exp(-\xi), \tag{11}$$

где

$$W_1=1+a+C_1, \quad W_2=1+a-C_1, \quad p=(W_1-a)/(W_1-W_2). \tag{12}$$

Константу интегрирования C_1 необходимо определить, подставив полученное решение в уравнение (10). Однако, сделать это затруднительно, так как решение получено в неявном виде. Выбрав $p=1$ или $p=0$, получим

$$W(\xi)=2(e^{-\xi}-1)-a. \tag{13}$$

Это решение удовлетворяет уравнению (10) только при $a=0$, т. е. для $V=c$. Этот результат был получен в [3].

Положив $p=2$ или $p=-1$, можно найти решения уравнения (10)

$$W(\xi)=\frac{4}{3}e^{-\xi}\left[1-\frac{2}{3}e^{\xi}+\sqrt{1-e^{\xi}}\right], \tag{14}$$

при условии $a=-\frac{4}{9}$. Это решение не является подходящим, так как оно комплексное при $\xi>0$.

Введем новую переменную $y(\xi)$, так что

$$W(\xi)=\frac{2(\gamma-1)}{(\gamma-2)}[y(\xi)-1]-a, \quad \gamma=p^{-1}. \tag{15}$$

Для того, чтобы было выполнено условие $W(0)=-a$, необходимо выполнение условия

$$y(0)=1. \tag{16}$$

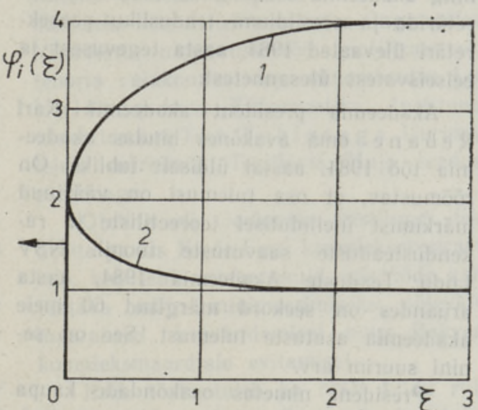
Из (11) найдем, что $y(\xi)$ удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$[\gamma-(\gamma-1)y(\xi)]\,[y(\xi)]^{\gamma-1}=\exp(-\gamma\xi). \qquad (17)$$

Это уравнение имеет два различных вещественных решения $y_1(\xi)$ и $y_2(\xi)$, удовлетворяющих условию (16) при любых $\xi>0$ и для всех $\gamma>1$ $(\gamma\neq 2)$. Если $\gamma=2$, то ограниченное решение (8) существует только при $\varepsilon=0$.

Используя (15) — (17), найдем, что уравнение (10) удовлетворяется только при

$$1-\frac{c^2}{V^2}=a\varepsilon=\frac{2\varepsilon(\gamma-1)}{(\gamma-2)^2}, \quad \gamma>1, \quad \gamma\neq 2. \qquad (18)$$



Профили импульсов.

Так как $a>0$ для всех $\gamma>1$, и при

$$\varepsilon<\frac{(\gamma-2)^2}{2(\gamma-1)}, \quad \varepsilon a<1, \qquad (19)$$

то

$$V=c(1-a\varepsilon)^{-1/2}>c. \qquad (20)$$

Таким образом, в нелинейном стандартном вязкоупругом теле могут распространяться с одной и той же скоростью $V>c$ две различные по форме волны стационарного профиля

$$U_i^{\cdot}(X,t)=(2\tau_0\beta)^{-1}H(\xi)\,W(\xi), \quad i=1,2, \qquad (21)$$

возбуждаемые краевым условием (2), с амплитудой

$$A=\frac{2\varepsilon(\gamma-1)}{\alpha(\gamma-2)}\frac{V^3}{c^3}, \qquad (22)$$

и функцией $\varphi(t)$, определяющей форму волны, задаваемой в виде

$$\varphi_i(\xi)=\frac{\gamma-1}{\gamma-2}-y_i(\xi), \quad i=1,2, \qquad (23)$$

где $y_i(\xi)$ вещественные решения уравнения (17), удовлетворяющие условию (16), а V определено в (20).

На рисунке показаны два профиля импульсов $\varphi_i(\xi)$ распространяющихся со скоростью $V>c$ в положительном направлении оси X без искажения формы для случая $\gamma=3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М., «Мир», 1977.
2. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
3. *Nigul, U.* In: Nonlinear Deformation Waves, IUTAM Symp., Tallinn, 1982, Berlin, Springer, 1983.
4. *Стулов А. С.* Тез. докл. IV Всесоюз. симпозиума по физике акусто-гидродинамических явлений и оптоакустике с секциями молекулярной акустики и геоакустики. Ашхабад, 1985, 31.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
23/XII 1985