

УДК 534.22 : 539.3

А. СТУЛОВ

О ВОЗМОЖНОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ СТАЦИОНАРНОГО ПРОФИЛЯ В НЕЛИНЕЙНОМ СТАНДАРТНОМ ВЯЗКОУПРУГОМ ТЕЛЕ

A. STULOV. STATIONAARSE PROFIIliga ÜHEMÖÖTMELISE AKUSTILISE LAINE LEVI VOIMALIKKUSEST MITTELINEAARSES STANDARDSES VISKOELASTSES KESKKONNAS

A. STULOV. ON THE ONE-DIMENSIONAL ACOUSTIC WAVE OF A CONSTANT PROFILE PROPAGATION IN NONLINEAR STANDARD VISCOELASTIC MEDIUM

(Представил Н. Алумяэ)

Существование волн, распространяющихся в нелинейных средах без изменения формы и скорости, известно давно, и они достаточно подробно описаны, например, в монографиях [1, 2]. Такие же волны в нелинейных наследственных средах изучены меньше. В [3] показана возможность существования в нелинейной наследственной среде волн стационарного профиля, движущихся со скоростью, равной скорости звука в линейной среде, а в [4], движущихся с большей скоростью.

Нами исследуются условия существования и форма волн стационарного профиля, скорость которых зависит от амплитуды.

Рассмотрим одномерный нелинейный волновой процесс, зависящий от лагранжевой координаты X , времени t , описываемый уравнением

$$U''(X, t) - c^2 g(U') U''(X, t) + \int_0^t K(\tau) U''(X, t - \tau) d\tau = 0, \quad (1)$$

и краевую задачу с условием

$$U'(0, t) = -cA H(t) \varphi(t), \quad A = \text{const}, \quad (2)$$

где $U(X, t)$ — продольные перемещения, $g(U')$ — функция нелинейности среды, $K(\tau)$ — ядро ползучести наследственной среды, c — скорость звука в среде, $H(t)$ — функция Хевисайда, $\varphi(t)$ — гладкая функция. Штрих обозначает производную по X , а точка — производную по t .

Выберем нулевые начальные условия

$$U(X, 0) = 0, \quad U'(X, 0) = 0, \quad (3)$$

и функцию нелинейности в виде

$$g(U') = 1 + a U'(X, t), \quad a = \text{const}. \quad (4)$$

Решение задачи (1), (2) будем искать в виде

$$U(X, t) = H(\xi) \psi(\xi), \quad \xi = \frac{1}{2\tau_0} \left(t - \frac{X}{V} \right), \quad (5)$$

т. е. волны, вызванной краевым воздействием в точке $X = 0$ и распространяющейся со скоростью V в положительном направлении оси X .

Введенный в формулу (5) параметр τ_0 имеет размерность времени и будет определен ниже.

Функция $\psi(\xi)$ удовлетворяет условиям

$$|\psi'(\xi)| < \infty, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = B = \text{const.} \quad (6)$$

Обозначим

$$1 - \frac{c^2}{V^2} = a\varepsilon, \quad \beta = \frac{ac^2}{2\tau_0\varepsilon V^3}, \quad (7)$$

и выберем $B = -a/\beta$. Тогда, подставляя (5) в (1), для $\xi > 0$ получим уравнение

$$a\varepsilon\psi''(\xi) + \beta\varepsilon\psi'(\xi)\psi''(\xi) + 2\tau_0BK(2\tau_0\xi) + 2\tau_0\int_0^\xi K[2\tau_0(\xi - z)]\psi''(z)dz = 0. \quad (8)$$

Рассмотрим случай стандартного вязкоупругого тела, для которого

$$K(t - \tau) = (\varepsilon/\tau_0) \exp\left(-\frac{t - \tau}{\tau_0}\right), \quad (9)$$

где $\varepsilon > 0$ и $\tau_0 > 0$ — наследственные параметры среды. Обозначив $\beta\psi'(\xi) = W(\xi)$, получим уравнение

$$W'(\xi)e^{2\xi}[a + W(\xi)] - 2a + 2\int_0^\xi e^{2z}W'(z)dz = 0. \quad (10)$$

Дифференцируя уравнение (10) по ξ , а затем дважды интегрируя и учитывая, что $W(0) = -a$, найдем

$$\left[\frac{W(\xi) + W_1}{W_1 - a}\right]^p \left[\frac{W(\xi) + W_2}{W_2 - a}\right]^{1-p} = \exp(-\xi), \quad (11)$$

где

$$W_1 = 1 + a + C_1, \quad W_2 = 1 + a - C_1, \quad p = (W_1 - a)/(W_1 - W_2). \quad (12)$$

Константу интегрирования C_1 необходимо определить, подставив полученное решение в уравнение (10). Однако, сделать это затруднительно, так как решение получено в неявном виде. Выбрав $p = 1$ или $p = 0$, получим

$$W(\xi) = 2(e^{-\xi} - 1) - a. \quad (13)$$

Это решение удовлетворяет уравнению (10) только при $a = 0$, т. е. для $V = c$. Этот результат был получен в [3].

Положив $p = 2$ или $p = -1$, можно найти решения уравнения (10)

$$W(\xi) = \frac{4}{3}e^{-\xi} \left[1 - \frac{2}{3}e^{\xi} + \sqrt{1 - e^{\xi}}\right], \quad (14)$$

при условии $a = -\frac{4}{9}$. Это решение не является подходящим, так как оно комплексное при $\xi > 0$.

Введем новую переменную $y(\xi)$, так что

$$W(\xi) = \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma - 2)} [y(\xi) - 1] - a, \quad \gamma = p^{-1}. \quad (15)$$

Для того, чтобы было выполнено условие $W(0) = -a$, необходимо выполнение условия

$$y(0) = 1. \quad (16)$$

Из (11) найдем, что $y(\xi)$ удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$[\gamma - (\gamma - 1)y(\xi)] [y(\xi)]^{\gamma-1} = \exp(-\gamma\xi). \quad (17)$$

Это уравнение имеет два различных вещественных решения $y_1(\xi)$ и $y_2(\xi)$, удовлетворяющих условию (16) при любых $\xi > 0$ и для всех $\gamma > 1$ ($\gamma \neq 2$). Если $\gamma = 2$, то ограниченное решение (8) существует только при $\varepsilon = 0$.

Используя (15) — (17), найдем, что уравнение (10) удовлетворяется только при

$$1 - \frac{c^2}{V^2} = a\varepsilon = \frac{2\varepsilon(\gamma - 1)}{(\gamma - 2)^2}, \quad \gamma > 1, \quad \gamma \neq 2. \quad (18)$$

Так как $a > 0$ для всех $\gamma > 1$, и при

$$\varepsilon < \frac{(\gamma - 2)^2}{2(\gamma - 1)}, \quad \varepsilon a < 1, \quad (19)$$

то

$$V = c(1 - a\varepsilon)^{-1/2} > c. \quad (20)$$

Таким образом, в нелинейном стандартном вязкоупругом теле могут распространяться с одной и той же скоростью $V > c$ две различные по форме волны стационарного профиля

$$U_i(X, t) = (2\tau_0\beta)^{-1}H(\xi)W(\xi), \quad i = 1, 2, \quad (21)$$

возбуждаемые краевым условием (2), с амплитудой

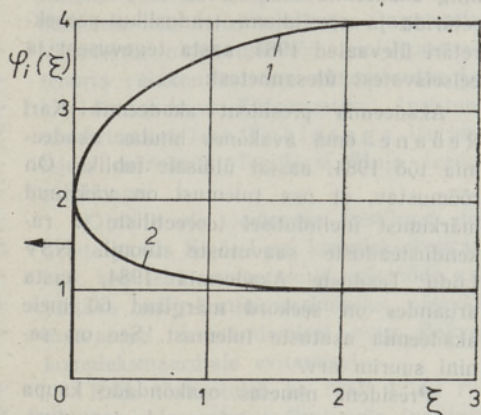
$$A = \frac{2\varepsilon(\gamma - 1)}{\alpha(\gamma - 2)} \frac{V^3}{c^3}, \quad (22)$$

и функцией $\varphi(t)$, определяющей форму волны, задаваемой в виде

$$\varphi_i(\xi) = \frac{\gamma - 1}{\gamma - 2} - y_i(\xi), \quad i = 1, 2, \quad (23)$$

где $y_i(\xi)$ вещественные решения уравнения (17), удовлетворяющие условию (16), а V определено в (20).

На рисунке показаны два профиля импульсов $\varphi_i(\xi)$ распространяющихся со скоростью $V > c$ в положительном направлении оси X без искажения формы для случая $\gamma = 3$.



Профили импульсов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М., «Мир», 1977.
2. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
3. Nigul, U. In: Nonlinear Deformation Waves, IUTAM Symp., Tallinn, 1982, Berlin, Springer, 1983.
4. Стулов А. С. Тез. докл. IV Всесоюз. симпозиума по физике акусто-гидродинамических явлений и оптоакустики с секциями молекулярной акустики и геоакустики. Ашхабад, 1985, 31.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
23/XII 1985