EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1986, 35, 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1986.2.13

УДК 681.511.42

Ю. НУРГЕС, Х. КАЛДА

О МОДАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ДИСКРЕТНОЙ БИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ

Ü. NURGES, H. KALDA. DISKREETSE BILINEAARSE SÜSTEEMI MODAALSEST JUHTIMISEST

Ü. NURGES, H. KALDA. ON THE MODAL CONTROL OF THE DISCRETE-TIME BILINEAR SYSTEM

(Представил Н. Алумяэ)

1. **Введение.** Билинейные системы привлекают в последние годы все большее внимание [1]. В некоторых аспектах они близки к линейным системам и поэтому представляет интерес выяснить возможности применения известных законов управления линейными системами к билинейным системам. В настоящей работе рассматриваются вопросы модального управления дискретной билинейной системой. Выводится нелинейный закон обратной связи, обеспечивающий предписанные полюсы замкнутой системы. Определяется область асимптотической устойчивости замкнутой системы в виде эллипсоида.

2. Постановка задачи. Рассмотрим билинейную систему с дискретным временем, которая описывается разностным уравнением

$$x(t+1) = Ax(t) + Dx(t)u(t) + bu(t), \tag{1}$$

где $x(t)$ — n-мерный вектор состояния системы, $u(t)$ — скалярное управляющее воздействие, A, D и b — действительные матрицы подходящей размерности.

Найдем управление $u(t)$ в виде обратной связи $u(t, x) = -k^{\mathrm{T}}(x)x(t)$ так, что замкнутая система

$$x(t+1) = F(x)x(t), \tag{2}$$

где

$$F(x) = A - bk^{\mathrm{T}}(x) - Dxk^{\mathrm{T}}(x),$$

имеет предписанные полюсы (собственные числа матрицы F) $\lambda_i(F)$, $i = 1, \ldots, n$. Такой принцип управления (т. н. модальное управление) широко используется в стационарных линейных системах [2].

Будем говорить, что система (1) локально стабилизируема с помощью обратной связи $k(x)$ в области Ω, если точка равновесия $x(t) \equiv 0$ замкнутой системы (2) является асимптотически устойчивой при любой $x(0) \in \Omega$. При этом область Ω называется областью притяжения или областью асимптотической устойчивости движения $x(t) \equiv 0$.

Требуется найти область асимптотической устойчивости при заданных полюсах $\lambda_i(F)$, $i = 1, \ldots, n$.

3. Каноническое представление системы. Пусть пара (A, b) полностью управляема и пусть собственные значения λ_i матрицы A вещественные и различные. Тогда без потери общности можем предположить, что пара (A, b) представлена в канонической форме Жордана

$$A=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ 0 & \ddots & 0 \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}, \qquad b=\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Система (1) приводится к управляемой канонической форме ([2], с. 239)

$$\tilde{x}(t+1)=\tilde{A}\tilde{x}(t)+\tilde{b}u(t), \tag{3}$$

где

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{c|c} 0 & I_{n-1} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{a^{\mathrm{T}}} \end{array}\right], \quad \tilde{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

преобразованием координат

$$\tilde{x}(t)=T(x(t))x(t), \tag{4}$$

причем

$$T(x)=\Lambda W(x), \tag{5}$$

$$\Lambda=\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \text{ — матрица Вандермонда,}$$

$$W(x)=\begin{bmatrix} w_1(x) & & \\ 0 & \ddots & 0 \\ & & w_n(x) \end{bmatrix}, \qquad w_i(x)=\frac{\mu_i}{d_i^{\mathrm{T}}x+1},$$

$[\mu_1, \dots, \mu_n]^{\mathrm{T}}$ — последний столбец матрицы Λ^{-1}, d_i^{T} — i-я строка матрицы D,

$$a^{\mathrm{T}}=[\lambda_1, \dots, \lambda_n]\Lambda^{-1}.$$

4. Модальное управление системой. Поведение системы (3) в преобразованных координатах $\tilde{x}(t)$ определяется стационарными матрицами $\tilde{A}$ и $\tilde{b}$. Как и при стационарных линейных системах можно найти такую обратную связь по состоянию $\tilde{x}(t)$, что поведение замкнутой системы (2) в преобразованных фазовых координатах $\tilde{x}(t)$ определяется заданной стационарной матрицей $\tilde{F}$ в сопровождающей форме ([2], с. 60)

$$\tilde{F}=\left[\begin{array}{c|c} 0 & I_{n-1} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{f^{\mathrm{T}}} \end{array}\right].$$

Тогда матрица обратной связи $k(\tilde{x})=\tilde{k}$ определяется как разница

$$\tilde{k}=a-f;$$

а управляющее воздействие

$$u(t,\tilde{x})=-\tilde{k}^{\mathrm{T}}\tilde{x}(t)$$

или в исходных координатах

$$u(t,x)=l^{\mathrm{T}}z(t), \tag{6}$$

где

$$l=\Lambda^{\mathrm{T}}(f-a),$$

$$z_i(t)=\frac{\mu_i x_i(t)}{d_i^{\mathrm{T}}x(t)+1}, \quad i=1, \dots, n.$$

Хорошо известно ([3], с. 137), что стационарная линейная система с матрицей $\bar{F}$ асимптотически устойчива при выполнении условия

$$|\lambda_i(\bar{F})| < 1, \quad i=1, \ldots, n. \tag{7}$$

Но это не значит, что система (2) асимптотически устойчива в целом. Причина, во-первых, в том, что координатная система преобразованных фазовых координат $\tilde{x}(t)$ изменяется в каждый момент t. А во-вторых, выполнять неравенство (7) оказывается невозможным на гиперплоскостях Γ_i, $\Gamma_i = \{x | d^{\mathrm{T}}{}_i x + 1 = 0\}$, $i = 1, \ldots, n$. Поэтому представляют интерес выяснить достаточные условия стабилизируемости билинейной системы (1) управлением (6) и аппроксимация области асимптотической устойчивости Ω.

5. Область асимптотической устойчивости. Гиперплоскости Γ_i делят пространство состояний $X = R^n$ на 2^n подпространств X_j. Пусть X_0 подпространство, содержащее начало координат. Тогда, очевидно, $\Omega \subset X_0$. Исследуем устойчивость замкнутой системы (2) прямым методом Ляпунова. Составляем функцию Ляпунова в виде квадратичной формы

$$v(t, x) = x^{\mathrm{T}}(t) P x(t),$$

где $P = P^{\mathrm{T}} > 0$ положительно определенная матрица такая, что выполняется уравнение Ляпунова

$$\bar{F}^{\mathrm{T}} P \bar{F} - P + Q = 0$$

при некоторой $Q = Q^{\mathrm{T}} > 0$.

Найдем разность

$$\Delta v(x) = v(t+1, x) - v(t, x).$$

Учитывая соотношения (2) и (4), получим

$$\Delta v(x) = x^{\mathrm{T}}(t) [F^{\mathrm{T}}(x) P F(x) - P] x(t),$$

где
$$F(x) = T^{-1}(x(t)) \bar{F} T(x(t)),$$

или ввиду (5)

$$F(x) = W^{-1}(x) G W(x),$$

где $G = \Lambda^{-1} \bar{F} \Lambda$.

Управление (6) будет локально стабилизирующим, если ([3], с. 61)

$$\Delta v(x) < 0, \tag{8}$$

в некоторой области Ω. Очевидно, требование (8) выполняется, если матрица

$$H(x) = F^{\mathrm{T}}(x) P F(x) - P$$

отрицательно определена в области Ω, т. е.

$$\lambda_i(H) < 0, \quad i=1, \ldots, n. \tag{9}$$

Пусть $\lambda_1(P) > \ldots > \lambda_n(P)$. Тогда

$$\lambda_i(H) \leqslant \lambda_i(F^{\mathrm{T}} P F) - \lambda_n(P).$$

Так как [4]
$$\lambda_i(F^{\mathrm{T}} P F) \leqslant \lambda_1(F^{\mathrm{T}} F) \lambda_i(P),$$

то для выполнения неравенства (9) необходимо

$$\lambda_1(F^{\mathrm{T}} F) < \frac{\lambda_n(P)}{\lambda_1(P)}$$

или, учитывая еще (8),

$$\frac{\lambda_1(P)}{\lambda_n(P)}\lambda_1(G^{\tau}G)<\frac{\omega^2_{\min}(x)}{\omega^2_{\max}(x)}. \qquad (10)$$

Неравенство (10) позволяет сделать следующие выводы:

1) для получения непустой области притяжения Ω необходимо $\alpha<1$, где $\alpha=\sqrt{\frac{\lambda_1(P)}{\lambda_n(P)}\lambda_1(G^{\tau}G)}$;

2) $\Omega\subset X_\Omega$, где $X_\Omega=\bigcap\limits_{i,j=1,\ldots,n} X_{ij}$, а $X_{ij}=\left\{x\,|\,\alpha^2<\frac{\omega_i^2(x)}{\omega_j^2(x)}<\frac{1}{\alpha^2}\right\}$ — сектор, окаймленный гиперплоскостями

$$\mu_i(d_j^{\tau}x+1)\pm\alpha\mu_j(d_i^{\tau}x+1)=0.$$

Пусть $X(c)=\{x\,|\,x^{\tau}Px\leqslant c\}$, $c>0$. Тогда аппроксимация области асимптотической устойчивости

$$\Omega=X(c_{\max}),$$

где $c_{\max}$ — максимальное число такое, что $X(c_{\max})\subset X_\Omega\cap X_0$.

Пример. Рассмотрим систему

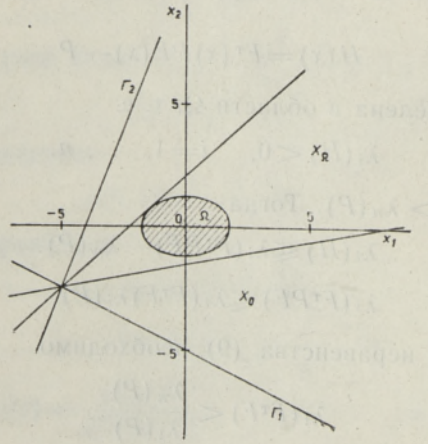
$$x(t+1)=\begin{bmatrix}0{,}6 & 0\\ 0 & 0{,}2\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0{,}1 & 0{,}2\\ 0{,}25 & -0{,}1\end{bmatrix}x(t)\,u(t)+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u(t).$$

Пусть эталонная динамика замкнутой системы описывается уравнением

$$\tilde{x}(t+1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0{,}5\end{bmatrix}\tilde{x}(t).$$

Тогда управляющее воздействие

$$u(t)=-\frac{0{,}15x_1(t)}{0{,}1x_1(t)+0{,}2x_2(t)+1}+\frac{0{,}15x_2(t)}{0{,}25x_1(t)-0{,}1x_2(t)+1}$$



стабилизирует систему при

$$Q=Q^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0{,}1 & 0\\ 0 & 0{,}005\end{bmatrix}, \quad P=P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0{,}1 & 0\\ 0 & 0{,}14\end{bmatrix}, \quad \alpha=0{,}591$$

в эллипсе (рисунок)

$$1{,}68x_1^2+2{,}36x_2^2-2{,}98=0.$$

Подпространство X_Ω окаймлено прямыми

$$0{,}12x_1-0{,}65x_2-1{,}02=0,$$

$$0{,}48x_1-0{,}55x_2+1{,}02=0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mohler, R.* Bilinear Control Processes. New York., Academic Press, 1973.
2. *Андреев Ю. Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М., «Наука», 1976.
3. *Кунцевич В. М., Лычак М. М.* Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. М., «Наука», 1977.
4. *Mori, T., Fukuma, N., Kuwahara, M.* Int. J. Contr., **36**, № 5, 889—892 (1982).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
25/VI 1985