

1986, 35, 2

УДК 681.511.42

Ю. НУРГЕС, Х. КАЛДА

О МОДАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ДИСКРЕТНОЙ БИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ

Ü. NURGES, H. KALDA. DISKREETSE BILINEAARSE SÜSTEEMI MODAALSEST JUHTIMISEST

Ü. NURGES, H. KALDA. ON THE MODAL CONTROL OF THE DISCRETE-TIME BILINEAR SYSTEM

(Представил Н. Алумяэ)

1. **Введение.** Билинейные системы привлекают в последние годы все большее внимание [1]. В некоторых аспектах они близки к линейным системам и поэтому представляет интерес выяснить возможности применения известных законов управления линейными системами к билинейным системам. В настоящей работе рассматриваются вопросы модального управления дискретной билинейной системой. Выводится нелинейный закон обратной связи, обеспечивающий предписанные полюсы замкнутой системы. Определяется область асимптотической устойчивости замкнутой системы в виде эллипсоида.

2. **Постановка задачи.** Рассмотрим билинейную систему с дискретным временем, которая описывается разностным уравнением

$$x(t+1) = Ax(t) + Dx(t)u(t) + bu(t), \quad (1)$$

где $x(t)$ — n -мерный вектор состояния системы, $u(t)$ — скалярное управляющее воздействие, A , D и b — действительные матрицы подходящей размерности.

Найдем управление $u(t)$ в виде обратной связи $u(t, x) = -k^T(x)x(t)$ так, что замкнутая система

$$x(t+1) = F(x)x(t), \quad (2)$$

где

$$F(x) = A - bk^T(x) - Dxk^T(x),$$

имеет предписанные полюсы (собственные числа матрицы F) $\lambda_i(F)$, $i = 1, \dots, n$. Такой принцип управления (т. н. модальное управление) широко используется в стационарных линейных системах [2].

Будем говорить, что система (1) локально стабилизируема с помощью обратной связи $k(x)$ в области Ω , если точка равновесия $x(t) \equiv 0$ замкнутой системы (2) является асимптотически устойчивой при любой $x(0) \in \Omega$. При этом область Ω называется областью притяжения или областью асимптотической устойчивости движения $x(t) \equiv 0$.

Требуется найти область асимптотической устойчивости при заданных полюсах $\lambda_i(F)$, $i = 1, \dots, n$.

3. **Каноническое представление системы.** Пусть пара (A, b) полностью управляема и пусть собственные значения λ_i матрицы A вещественные и различные. Тогда без потери общности можем предположить, что пара (A, b) представлена в канонической форме Жордана

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Система (1) приводится к управляемой канонической форме ([2], с. 239)

$$\tilde{x}(t+1) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{b}u(t), \quad (3)$$

где

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & I_{n-1} \\ a^T \end{bmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

преобразованием координат

$$\tilde{x}(t) = T(x(t))x(t), \quad (4)$$

причем

$$T(x) = \Lambda W(x), \quad (5)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \text{ — матрица Вандермонда,}$$

$$W(x) = \begin{bmatrix} w_1(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_n(x) \end{bmatrix}, \quad w_i(x) = \frac{\mu_i}{d_i^T x + 1},$$

$[\mu_1, \dots, \mu_n]^T$ — последний столбец матрицы Λ^{-1} , d_i^T — i -я строка матрицы D ,

$$a^T = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]\Lambda^{-1}.$$

4. Модальное управление системой. Поведение системы (3) в преобразованных координатах $\tilde{x}(t)$ определяется стационарными матрицами \tilde{A} и \tilde{b} . Как и при стационарных линейных системах можно найти такую обратную связь по состоянию $\tilde{x}(t)$, что поведение замкнутой системы (2) в преобразованных фазовых координатах $\tilde{x}(t)$ определяется заданной стационарной матрицей \tilde{F} в сопровождающей форме ([2], с. 60)

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & I_{n-1} \\ \tilde{f}^T \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица обратной связи $k(\tilde{x}) = \tilde{k}$ определяется как разница

$$\tilde{k} = a - \tilde{f};$$

а управляющее воздействие

$$u(t, \tilde{x}) = -\tilde{k}^T \tilde{x}(t)$$

или в исходных координатах

$$u(t, x) = l^T z(t), \quad (6)$$

где

$$l = \Lambda^T (\tilde{f} - a),$$

$$z_i(t) = \frac{\mu_i x_i(t)}{d_i^T x(t) + 1}, \quad i = 1, \dots, n,$$

Хорошо известно ([³], с. 137), что стационарная линейная система с матрицей \tilde{F} асимптотически устойчива при выполнении условия

$$|\lambda_i(\tilde{F})| < 1, \quad i=1, \dots, n. \quad (7)$$

Но это не значит, что система (2) асимптотически устойчива в целом. Причина, во-первых, в том, что координатная система преобразованных фазовых координат $\tilde{x}(t)$ изменяется в каждый момент t . А во-вторых, выполнять неравенство (7) оказывается невозможным на гиперплоскостях Γ_i , $\Gamma_i = \{x | d^T x + 1 = 0\}$, $i=1, \dots, n$. Поэтому представляют интерес выяснить достаточные условия стабилизируемости билинейной системы (1) управлением (6) и аппроксимация области асимптотической устойчивости Ω .

5. Область асимптотической устойчивости. Гиперплоскости Γ_i делят пространство состояний $X = R^n$ на 2^n подпространств X_j . Пусть X_0 подпространство, содержащее начало координат. Тогда, очевидно, $\Omega \subset X_0$. Исследуем устойчивость замкнутой системы (2) прямым методом Ляпунова. Составляем функцию Ляпунова в виде квадратичной формы

$$v(t, x) = x^T(t) P x(t),$$

где $P = P^T > 0$ положительно определенная матрица такая, что выполняется уравнение Ляпунова

$$F^T P F - P + Q = 0$$

при некоторой $Q = Q^T > 0$.

Найдем разность

$$\Delta v(x) = v(t+1, x) - v(t, x).$$

Учитывая соотношения (2) и (4), получим

$$\Delta v(x) = x^T(t) [F^T(x) P F(x) - P] x(t),$$

где

$$F(x) = T^{-1}(x(t)) \tilde{F} T(x(t)),$$

или ввиду (5)

$$F(x) = W^{-1}(x) G W(x),$$

где $G = \Lambda^{-1} \tilde{F} \Lambda$.

Управление (6) будет локально стабилизирующим, если ([³], с. 61)

$$\Delta v(x) < 0, \quad (8)$$

в некоторой области Ω . Очевидно, требование (8) выполняется, если матрица

$$H(x) = F^T(x) P F(x) - P$$

отрицательно определена в области Ω , т. е.

$$\lambda_i(H) < 0, \quad i=1, \dots, n. \quad (9)$$

Пусть $\lambda_1(P) > \dots > \lambda_n(P)$. Тогда

$$\lambda_i(H) \leq \lambda_i(F^T P F) - \lambda_n(P).$$

Так как [⁴]

$$\lambda_i(F^T P F) \leq \lambda_1(F^T F) \lambda_i(P),$$

то для выполнения неравенства (9) необходимо

$$\lambda_1(F^T F) < \frac{\lambda_n(P)}{\lambda_1(P)}$$

или, учитывая еще (8),

$$\frac{\lambda_1(P)}{\lambda_n(P)} \lambda_1(G^T G) < \frac{\omega_{\min}^2(x)}{\omega_{\max}^2(x)}. \quad (10)$$

Неравенство (10) позволяет сделать следующие выводы:

1) для получения непустой области притяжения Ω необходимо $\alpha < 1$, где $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda_1(P)}{\lambda_n(P)} \lambda_1(G^T G)}$;

2) $\Omega \subset X_\Omega$, где $X_\Omega = \bigcap_{i,j=1,\dots,n} X_{ij}$, а $X_{ij} = \left\{ x \mid \alpha^2 < \frac{\omega_i^2(x)}{\omega_j^2(x)} < \frac{1}{\alpha^2} \right\}$ —

сектор, окаймленный гиперплоскостями

$$\mu_i(d_j^T x + 1) \pm \alpha \mu_j(d_i^T x + 1) = 0.$$

Пусть $X(c) = \{x \mid x^T P x \leq c\}$, $c > 0$. Тогда аппроксимация области асимптотической устойчивости

$$\Omega = X(c_{\max}),$$

где c_{\max} — максимальное число такое, что $X(c_{\max}) \subset X_\Omega \cap X_0$.

Пример. Рассмотрим систему

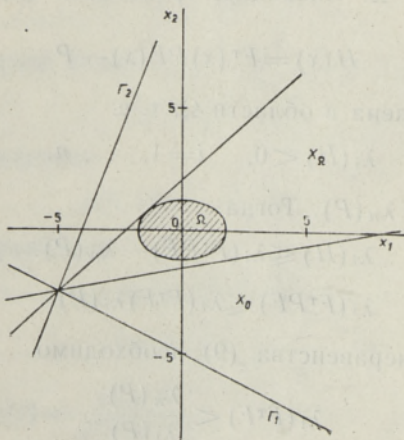
$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,25 & -0,1 \end{bmatrix} x(t) u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

Пусть эталонная динамика замкнутой системы описывается уравнением

$$\tilde{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \tilde{x}(t).$$

Тогда управляющее воздействие

$$u(t) = \frac{0,15x_1(t)}{0,1x_1(t) + 0,2x_2(t) + 1} + \frac{0,15x_2(t)}{0,25x_1(t) - 0,1x_2(t) + 1}$$



стабилизирует систему при

$$Q=Q^T=\begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,005 \end{bmatrix}, \quad P=P^T=\begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,14 \end{bmatrix}, \quad \alpha=0,591$$

в эллипсе (рисунок)

$$1,68x_1^2 + 2,36x_2^2 - 2,98 = 0.$$

Подпространство X_Ω окаймлено прямыми

$$0,12x_1 - 0,65x_2 - 1,02 = 0,$$

$$0,48x_1 - 0,55x_2 + 1,02 = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Mohler, R. Bilinear Control Processes. New York, Academic Press, 1973.
2. Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами. М., «Наука», 1976.
3. Кунцевич В. М., Лычак М. М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. М., «Наука», 1977.
4. Mori, T., Fukuma, N., Kuwahara, M. Int. J. Contr., 36, № 5, 889—892 (1982).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
25/VI 1985