EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1986, 35, 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1986.2.01

УДК 519.1

Каарин РИЙВЕС

КЛАССИФИКАЦИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ПОЛИМАТРОИДОВ

(Представил А. Хумал)

Исследование n-мерных полиматроидов в смысле Дж. Эдмондса [1] приводит к исследованию особого класса $\Pi(n)$ многогранников $\Pi\subset R^+_n$. С помощью подходящим образом заданного отношения эквивалентности на множестве $\Pi(n)$ автором [2] описана некоторая серия включающих друг друга классификаций n-мерных полиматроидов, классы которых инвариантны относительно гомотетий с положительными параметрами и относительно перенумерации координатных осей в R_n. Используя наиболее подробное описание отношения эквивалентности в случае трехмерных полиматроидов, задача их классификации решается полностью. Для получения искомой классификации следует учесть, что (см. [3], с. 144; [2], с. 418) многогранник $\Pi\subset R^+_3$ является трехмерным полиматроидом, т. е. $\Pi\in\Pi(3)$ тогда и только тогда, когда координаты его элементов $\boldsymbol{x}=(x_i,\ x_j,\ x_k)\in\Pi$, удовлетворяют линейным неравенствам

$$\begin{aligned} &0\leqslant x_a\leqslant r_a, \quad a\in\mathfrak{I}=\{i,j,k\}=\{1,2,3\},\\ &x_a+x_b\leqslant r_{ab}, \quad a,b\in\mathfrak{I}, \quad a<b, \\ &x_a+x_b+x_c\leqslant r, \quad \{a,b,c\}=\mathfrak{I}, \end{aligned} \tag{1}$$

где действительные параметры $r_a>0$, $r_{ab}=r_{ba}>0$ и $r>0$ удовлетворяют условиям

$r_{ab}\leqslant r_a+r_b$ для любых $a,b\in\mathfrak{I}$, $a\neq b$,
$r\leqslant r_a+r_{bc}$ для каждого $a\in\mathfrak{I}$ при $\{a,b,c\}=\mathfrak{I}$,
$r\leqslant r_{ab}+r_{ac}-r_a$ для каждого $a\in\mathfrak{I}$ при $\{a,b,c\}=\mathfrak{I}$.

Введем понятия и величины, которые полностью описывают граневую структуру заданного полиматроида $\Pi\in\Pi(3)$. Пусть множество перестановок, составленных из элементов множества $\mathfrak{I}=\{i,j,k\}$, обозначено через $\mathfrak{S}_3=\{\sigma=(A,B,C),\ \{A,B,C\}=\{i,j,k\}\}$. Сопоставим произвольной перестановке $\sigma=(A,B,C)\in\mathfrak{S}_3$ т. н. *σ-максимальный элемент* $^*\boldsymbol{x}^\sigma$ рассматриваемого полиматроида $\Pi\in\Pi(3)$ так, чтобы его координаты вычислялись по формулам

$$^*x^\sigma{}_A=\max_{x\in\Pi} x_A,\qquad ^*x^\sigma{}_B=\max_{x\in\Pi_A} x_B,\qquad ^*x^\sigma{}_C=\max_{x\in\Pi_{AB}} x_C, \tag{2}$$

где $\Pi_A=\{\boldsymbol{x}\in\Pi,\ x_A={}^*x^\sigma{}_A\}$, $\Pi_{AB}=\{\boldsymbol{x}\in\Pi,\ x_A={}^*x^\sigma{}_A,\ x_B={}^*x^\sigma{}_B\}$.

Предложение 1 (см. [2], с. 418). *Если полиматроид* $\Pi\in\Pi(3)$ *задается системой* (1), *то его σ-максимальными элементами будут векторы* $^*\boldsymbol{x}^\sigma\in R^+_3$ *с координатами* $^*x^\sigma{}_i$, $^*x^\sigma{}_j$, $^*x^\sigma{}_k$, *значения которых представлены в табл. 1.*

Таблица 1

Координаты σ-максимальных элементов $\Pi \in \Pi(3)$

Перестановка $\sigma \in \mathfrak{S}_3$	${}^*x^{\sigma}{}_i$	${}^*x^{\sigma}{}_j$	${}^*x^{\sigma}{}_k$
(i, j, k)	r_i	$r_{ij} - r_i$	$r - r_{ij}$
(i, k, j)	r_i	$r - r_{ik}$	$r_{ik} - r_i$
(j, i, k)	$r_{ij} - r_j$	r_j	$r - r_{ij}$
(j, k, i)	$r - r_{jk}$	r_j	$r_{jk} - r_j$
(k, i, j)	$r_{ik} - r_k$	$r - r_{ik}$	r_k
(k, j, i)	$r - r_{jk}$	$r_{jk} - r_k$	r_k

Определение 1. *Перестановки $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_3$ называются эквивалентными относительно полиматроида $\Pi \in \Pi(3)$ тогда и только тогда, когда ${}^*x^{\sigma}{}_a = {}^*x^{\tau}{}_a$ при всех $a \in \mathfrak{I}$.*

Соответственно определенному отношению эквивалентности множество $\mathfrak{S}_3$ разбивается на классы эквивалентности $E^{\alpha}(\Pi) \subseteq \mathfrak{S}_3$, $\alpha \in \mathcal{M} = \{1, \ldots, m\}$, $1 \leqslant m \leqslant 6$. Общие свойства классов $E^{\alpha}(\Pi)$ даны в [2]. В табл. 2 указаны все существующие возможности разбиений $\mathfrak{S}_3$ при этом сохранена нумерация условий для параметров r_a, r_{ab}, r системы (1) из [4] (см. также [2], с. 419).

Таблица 2

Всевозможные разбиения множества $\mathfrak{S}_3$ на классы $E^{\alpha}(\Pi)$

1	$E^1(\Pi) = \mathfrak{S}_3$	7	$\{(i, j, k), (i, k, j)\}$, $\{(j, i, k), (j, k, i)\}$, $\{(k, i, j)\}$, $\{(k, j, i)\}$
2	$\{(i, j, k), (j, i, k), (j, k, i)\}$, $\{(i, k, j), (k, i, j), (k, j, i)\}$	8	$\{(i, j, k), (j, i, k)\}$, $\{(i, k, j)\}$, $\{(j, k, i)\}$, $\{(k, i, j)\}$, $\{(k, j, i)\}$
3	$\{(i, j, k), (j, i, k)\}$, $\{(i, k, j), (k, i, j)\}$, $\{(j, k, i), (k, j, i)\}$	9	$\{(k, i, j), (k, j, i)\}$, $\{(i, j, k)\}$, $\{(i, k, j)\}$, $\{(j, i, k)\}$, $\{(j, k, i)\}$
4	$\{(i, j, k), (i, k, j)\}$, $\{(j, i, k), (j, k, i)\}$, $\{(k, i, j), (k, j, i)\}$	10	$\{(i, j, k)\}$, $\{(i, k, j)\}$, $\{(j, i, k)\}$, $\{(j, k, i)\}$, $\{(k, i, j)\}$, $\{(k, j, i)\}$
5	$\{(i, j, k), (j, i, k)\}$, $\{(j, k, i)\}$, $\{(i, k, j), (k, i, j)\}$, $\{(k, j, i)\}$		
6	$\{(i, j, k), (j, i, k)\}$, $\{(i, k, j)\}$, $\{(k, i, j), (k, j, i)\}$, $\{(j, k, i)\}$		

При фиксированном полиматроиде $\Pi \in \Pi(3)$ формальная структура каждого класса $E^{\alpha}(\Pi)$ описывается множествами

$$\sum(\alpha) = \{1\sigma,\ \sigma = (1\sigma, 2\sigma, 3\sigma) \in E^{\alpha}(\Pi)\} \subseteq \mathfrak{I}, \quad \alpha \in \mathcal{M};$$

$$\sum(\alpha, A) = \{2\sigma,\ 1\sigma = A,\ \sigma = (1\sigma, 2\sigma, 3\sigma) \in E^{\alpha}(\Pi)\} \subset \mathfrak{I},\ A \in \sum(\alpha),\ \alpha \in \mathcal{M}.$$

Обозначим мощности введенных множеств соответственно через $p^{\alpha} = |E^{\alpha}(\Pi)|$, $q^{\alpha} = |\sum(\alpha)|$, $q^{\alpha}{}_A = |\sum(\alpha, A)|$. Без ограничения общности можно предполагать, что $p^1 \geqslant \ldots \geqslant p^m \geqslant 1$ и при $p^{\alpha} = \ldots = p^{\omega}$, $\{\alpha, \ldots, \omega\} \subseteq \mathcal{M}$, $\alpha < \ldots < \omega$, всегда $q^{\alpha} \geqslant \ldots \geqslant q^{\omega}$. Кроме того, из табл. 2 следует, что для трехмерных полиматроидов $\Pi \in \Pi(3)$ при

Таблица 3

Значения параметров m, p^{α}, q^{α}, $q^{\alpha}{}_A$

m	1	2	$3 \leqslant m \leqslant 6$		
p^{α}	6	3	2	2	1
q^{α}	3	2	2	1	1
$q^{\alpha}{}_A$	2, 2, 2	2, 1	1, 1	2	1

фиксированных значениях m, p^α, q^α параметры $q^\alpha{}_A$ принимают вполне определеные значения (табл. 3).

Чтобы использовать величины p^α, q^α, $q^\alpha{}_A$ для задания отношения эквивалентности на множестве $\Pi(3)$ каждому классу $E^\alpha(\Pi) \subseteq \mathfrak{S}_3$ сопоставляется т. н. *E-максимальный элемент* $\boldsymbol{e}^\alpha \in \Pi$, взяв $e^\alpha{}_a = {}^*x^\sigma{}_a$, $a \in \mathfrak{I}$, $\sigma \in E^\alpha(\Pi)$.

Известно (см. [2], с. 411), что $\boldsymbol{e}^\alpha = (e^\alpha{}_i, e^\alpha{}_j, e^\alpha{}_k)$, $\alpha \in \mathcal{M}$, является вершиной полиматроида $\Pi \in \Pi(3)$. Таким образом, граневая структура $\Pi \in \Pi(3)$ определяется расположением $\boldsymbol{e}^\alpha \in \Pi$ в пространстве $R_3{}^+$ или, иными словами, значениями координат $e^\alpha{}_a$, $a \in \mathfrak{I}$, $\alpha \in \mathcal{M}$. Среди этих координат некоторые никогда не обращаются в нуль, а некоторые принимают как нулевые, так и ненулевые значения. Последние называются *главными параметрами* полиматроида, строго ненулевые параметры называются *вторичными*. Главные параметры определяют граневую структуру полиматроида $\Pi \in \Pi(3)$, т. е. число его вершин, ребер и граней, а также их взаимное расположение, вторичные же задают величину полиматроида.

С помощью следующего предложения описывается множество $\mathcal{G} = \{e^\alpha{}_a \geqslant 0,\ \alpha \in \mathcal{M}\}$ главных параметров полиматроида.

Предложение 2.

A. *Если* $p^\alpha = 6$, $q^\alpha = 3$, $q^\alpha{}_a = 2$ $(a \in \mathfrak{I})$, *то полиматроид* Π *главных параметров не имеет* $(\mathcal{G} = \varnothing)$, *и вторичными будут любые два из* $e^1{}_i$, $e^1{}_j$, $e^1{}_k$ *(третий определяется из условия* $e^1{}_i + e^1{}_j + e^1{}_k = r$*).*

B. *Если* $p^\alpha = 3$, $q^\alpha = 2$; $q^\alpha{}_A = 2$, $q^\alpha{}_B = 1$, *то* $e^\alpha{}_C \in \mathcal{G}$ *при* $\{A, B, C\} = \mathfrak{I}$.

C. *Если* $p^\alpha = 2$, $q^\alpha = 2$, $q^\alpha{}_A = 1$, $q^\alpha{}_B = 1$, *то* $e^\alpha{}_C \in \mathcal{G}$ *при* $\{A, B, C\} = \mathfrak{I}$.

D. *Если* $p^\alpha = 2$, $q^\alpha = 1$, $q^\alpha{}_A = 2$, *то* $e^\alpha{}_B$, $e^\alpha{}_C \in \mathcal{G}$ при $\{A, B, C\} = \mathfrak{I}$.

E. *Если* $p^\alpha = 1$, $q^\alpha = 1$, $q^\alpha{}_A = 1$ и $\sum(\alpha, A) = B$, *то* $e^\alpha{}_C \in \mathcal{G}$ *при* $\{A, B, C\} = \mathfrak{I}$.

Определение 2. *Пусть трехмерные полиматроиды* Π *и* Π' *характеризуются наборами параметров* $(m;\ p^1, \ldots, p^m;\ q^1, \ldots, q^m)$ *и* $(m';\ p^{1\prime}, \ldots, p^{m\prime};\ q^{1\prime}, \ldots, q^{m\prime})$ *и множествами главных параметров* $\mathcal{G}$ *и* $\mathcal{G}'$ *соответственно. Полиматроиды* Π, $\Pi' \in \Pi(3)$ *называются структурно вполне эквивалентными, если справедливы равенства* $m = m'$, $p^\alpha = p^{\alpha\prime}$, $q^\alpha = q^{\alpha\prime}$ $(\alpha \in \mathcal{M} = \{1, \ldots, m\})$ *и, кроме того, совпадают числа* g_0 *и* g'_0 *нулевых элементов в* $\mathcal{G}$ *и* $\mathcal{G}'$ *соответственно.*

Обозначим классы полной структурной эквивалентности трехмерных полиматроидов через $N(m;\ p^\alpha;\ q^\alpha;\ g_0) \subset \Pi(3)$. Соответствующую классификацию назовем *полной структурной классификацией* полиматроидов $\Pi \in \Pi(3)$.

В [4] (с. 26) дана структурная классификация трехмерных полиматроидов, содержащая десять классов $L(m;\ p^\alpha;\ q^\alpha) \subset \Pi(3)$. Указаны также условия для параметров r_a, r_{ab}, r, при которых система (1) задает полиматроид из фиксированного класса $L(m;\ p^\alpha;\ q^\alpha)$. Следует отметить, что классы $L(m;\ p^\alpha;\ q^\alpha)$ непосредственно соответствуют разбиению множества $\mathfrak{S}_3$ на классы эквивалентности $E^\alpha(\Pi)$ из табл. 2. Полная структурная классификация с классами $N(m;\ p^\alpha;\ q^\alpha;\ g_0) \subset \Pi(3)$ получается разбиением соответствующих классов $L(m;\ p^\alpha;\ q^\alpha)$ по воз-

Таблица 4

Условия на главные параметры класса L (4; 2,2,1,1; 1,1,1,1)

$e^1{}_j \geqslant 0$	$e^1{}_k \geqslant 0$	$e^2{}_i \geqslant 0$	$e^2{}_k \geqslant 0$	$e^3{}_j \geqslant 0$	$e^4{}_i \geqslant 0$
$r \geqslant r_{ik}$ $(r_{ij} \geqslant r_i)$	$r \geqslant r_{ij}$ $(r_{ik} \geqslant r_i)$	$r \geqslant r_{jk}$ $(r_{ij} \geqslant r_j)$	$r \geqslant r_{ij}$ $(r_{jk} \geqslant r_j)$	$r \geqslant r_{ik}$	$r \geqslant r_{jk}$

можным значениям главных параметров полиматроида $\Pi \in L(m; p^\alpha; q^\alpha)$. Определение классов $N(m; p^\alpha; q^\alpha; g_0) \subset L(m; p^\alpha; q^\alpha)$ осуществляется по следующим этапам.

1. Составление множества $\mathfrak{G}$ главных параметров полиматроида $\Pi \in L(m; p^\alpha; q^\alpha)$ по предложению 2.

2. Выяснение условий, которым кроме условий класса $L(m; p^\alpha; q^\alpha)$ по определению 1 и табл. 1 удовлетворяют параметры r_a, r_{ab}, r, если система (1) задает полиматроид из класса $N(m; p^\alpha; q^\alpha; g_0)$. Оказывается, что в конечном счете при $\mathfrak{G} \neq \varnothing$ искомые условия всегда задаются в виде $r \geqslant r_{ij}$, $r \geqslant r_{ik}$, $r \geqslant r_{jk}$.

Таблица 5

Полная структурная классификация полиматроидов $\Pi \in \Pi(3)$

Номер	Параметры класса $L(m; p^\alpha; q^\alpha)$	$r \wedge r_{ij}$	$r \wedge r_{ik}$	$r \wedge r_{jk}$	Число вершин	Число ребер	Число граней
1	(1; 6; 3)	—	—	—	8	12	6
2_1	(2; 3, 3;	$\neq$	$\neq$	—	10	15	7
2_2	2; 2)	$\neq$	$=$	—	8	12	6
2_3		$=$	$=$	—	6	9	5
3_1	(3; 2, 2,	$\neq$	$\neq$	$\neq$	10	15	7
3_2	2; 2, 2,	$\neq$	$\neq$	$=$	9	14	7
3_3	2)	$\neq$	$=$	$=$	8	13	7
3_4		$=$	$=$	$=$	7	12	7
4_1	(3; 2, 2,	$\neq$	$\neq$	$\neq$	13	21	10
4_2	2; 1, 1,	$\neq$	$\neq$	$=$	9	14	7
4_3	1)	$\neq$	$=$	$=$	6	9	5
4_4		$=$	$=$	$=$	4	6	4
5_1	(4; 2, 2,	$\neq$	$\neq$	$\neq$	12	18	8
5_2	1, 1; 2,	$\neq$	$\neq$	$=$	10	15	7
5_3	2, 1, 1)	$=$	$\neq$	$\neq$	11	17	8
5_4		$=$	$=$	$\neq$	10	16	8
5_5		$=$	$\neq$	$=$	9	14	7
5_6		$=$	$=$	$=$	8	13	7
6_1	(4; 2, 2,	$\neq$	$\neq$	$\neq$	13	20	9
6_2	1, 1; 2,	$\neq$	$\neq$	$=$	10	15	7
6_3	1, 1, 1)	$=$	$\neq$	$\neq$	12	19	9
6_4		$=$	$\neq$	$=$	9	14	7
6_5		$\neq$	$=$	$=$	8	12	16
6_6		$=$	$=$	$=$	7	11	6
7_1	(4; 2, 2,	$\neq$	$\neq$	$\neq$	14	22	10
7_2	1, 1; 1,	$\neq$	$\neq$	$=$	11	17	8
7_3	1, 1, 1)	$=$	$\neq$	$\neq$	10	15	7
7_4		$=$	$\neq$	$=$	8	12	6
7_5		$\neq$	$=$	$=$	8	12	6
7_6		$=$	$=$	$=$	6	9	5
8_1	(5; 2, 1,	$\neq$	$\neq$	$\neq$	14	21	9
8_2	1, 1, 1;	$=$	$\neq$	$\neq$	13	20	9
8_3	2, 1, 1,	$\neq$	$\neq$	$=$	12	18	8
8_4	1, 1)	$=$	$\neq$	$=$	11	17	8
8_5		$\neq$	$=$	$=$	10	15	7
8_6		$=$	$=$	$=$	9	14	7
9_1	(5; 2, 1,	$\neq$	$\neq$	$\neq$	15	23	10
9_2	1, 1, 1;	$=$	$\neq$	$\neq$	13	20	9
9_3	1, 1, 1,	$\neq$	$\neq$	$=$	12	18	8
9_4	1, 1)	$=$	$\neq$	$=$	10	15	7
9_5		$\neq$	$=$	$=$	10	15	7
9_6		$=$	$=$	$=$	8	12	6
10_1	(6, 1, 1,	$\neq$	$\neq$	$\neq$	16	24	10
10_2	1, 1, 1,	$\neq$	$\neq$	$=$	14	21	9
10_3	1; 1, 1,	$\neq$	$=$	$=$	12	18	8
10_4	1, 1, 1,	$=$	$=$	$=$	10	15	7
	1)						

Рассмотрим, к примеру, подробнее случай класса $L(4;\ 2,2,1,1;\ 1,1,1,1)$ (соответствующий разбиению № 7 из табл. 2).

1. По табл. 2 справедливо $E^1(\Pi)=\{(i,j,k),\ (i,k,j)\}$, $E^2(\Pi)=\{(j,i,k),\ (j,k,i)\}$, $E^3(\Pi)=\{(k,i,j)\}$, $E^4(\Pi)=\{(k,j,i)\}$. Следовательно, с учетом разделов D и E предложения 2, множеством главных параметров будет $\mathfrak{G}=\{e^1{}_j,\ e^1{}_k,\ e^2{}_i,\ e^2{}_k,\ e^3{}_j,\ e^4{}_i\}$.

2. Так как по определению 1 теперь $\boldsymbol{e}^1={}^*\boldsymbol{x}^{(i,j,k)}={}^*\boldsymbol{x}^{(i,k,j)}$, $\boldsymbol{e}^2={}^*\boldsymbol{x}^{(j,i,k)}={}^*\boldsymbol{x}^{(j,k,i)}$, $\boldsymbol{e}^3={}^*\boldsymbol{x}^{(k,i,j)}$, $\boldsymbol{e}^4={}^*\boldsymbol{x}^{(k,j,i)}$, то из табл. 1 следует, что их координаты $e^\alpha{}_a\in\mathfrak{G}$ удовлетворяют условиям табл. 4.

Из табл. 4 ясно, что основными являются неравенства $r\geqslant r_{ij}$ $(r_{jk}\geqslant r_j,\ r_{ik}\geqslant r_i)$, $r\geqslant r_{ik}$ $(r_{ij}\geqslant r_i)$, $r\geqslant r_{jk}$ $(r_{ij}\geqslant r_j)$. С точностью до взаимной замены i-й и j-й координатной оси существует шесть различных возможностей для равенств или неравенств r с r_{ij}, r_{ik} и r_{jk} соответственно. Полученные классы $N(4;\ 2,2,1,1;\ 1,1,1,1;\ g_{0t})\subset L(4;\ 2,2,1,1;\ 1,1,1,1)$, $t=1,\ \ldots,\ 6$, включены в общий список — в табл. 5, где наряду с параметрами m, p^α, q^α класса $N(m;\ p^\alpha;\ q^\alpha;\ g_{0t})$ указываются условия для r, r_{ab}, при которых система (1) задает полиматроид из рассматриваемого класса. Кроме того, табл. 5 содержит основные числовые характеристики граневой структуры полиматроидов каждого класса.

Замечание. В личном письме автору д-р Э. Гирлих представил список трехмерных полиматроидов, полученный им совместно со своими учениками независимо от автора настоящей работы. Этот список содержит полиматроиды на четыре класса меньше, чем наша табл. 5. Связано это с тем, что полиматроиды с характеристическими векторами (9, 14, 7), (10, 15, 7) и (12, 18, 8), координатами которых являются числа вершин, ребер и граней полиматроида соответственно, в нашей классификации описаны с точностью до параллельности ребер и граней.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Edmonds, J.* In: Combinatorial Structures and their Applications. London, Gordon and Breach, 1970.
2. *Рийвес К.* Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 33, № 4, 408—423 (1984).
3. *Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К.* Многогранники, графы, оптимизация. М., «Наука», 1981.
4. *Riives, K.* In: 27. Intern. Wiss. Koll. TH Ilmenau. Vortragsreiche «Graphen und Netzwerke — Theorie und Anwendung». Ilmenau, 1982, 23—26,

Эстонская сельскохозяйственная академия

Поступила в редакцию
8/IV 1985

Kaarin RIIVES

KOLMEMÕÕTMELISTE POLÜMATROIDIDE KLASSIFIKATSIOON

Eelmises töös [2] esitatud klassifitseerimismeetodit on nüüd rakendatud kolmemõõtmelise ülesande lõplikuks lahendamiseks. On saadud nn. täielik struktuurne klassifikatsioon (tab. 5), mille puhul ühte klassi kuuluvad sama kombinatoorse struktuuriga hulktahukad, arvestades tippude, servade ja tahkude arvu ning viimaste paralleelsust. Need klassid on invariantsed vaid sisaldava ruumi koordinaattelgede ümbernummerdamise ja positiivsete parameetritega homoteetiate suhtes.

Kaarin RIIVES

A CLASSIFICATION OF THREE-DIMENSIONAL POLYMATROIDS

The method of classification proposed in [2] is applied for the complete solution of the three-dimensional problem. As a result, there has been obtained a complete structural classification (Table 5). A class of this classification contains polytopes with the same facial structure in the sense of the number of vertices, edges and faces and parallelism of the latter. These classes are invariant only with respect to the rearrangement of coordinate axis of the containing space and its homothetic transformations with positive parameters.