EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1985, 34, 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1985.2.14

681.511.22

Ю. НУРГЕС

ЛАГЕРРОВА МОДЕЛЬ «ВХОД—ВЫХОД»

Ü. NURGES. LAGUERRE'I SISEND-VÄLJUNDMUDEL

U. NURGES. INPUT-OUTPUT LAGUERRE MODEL

(Представил Н. Алумяэ)

Введение. Модели типа «вход—выход» наиболее подходящие для решения задач идентификации. Для сглаживания и сжатия входных и выходных сигналов динамической системы используется успешно их разложение по ортогональным многочленам Лагерра [1–3]. В [1] определены соотношения между коэффициентами разложения входных и выходных сигналов скалярной линейной системы через ее разностное уравнение n-го порядка. В [3] предложены лагерровы уравнения состояния, связывающие коэффициенты разложения входных воздействий и выходных переменных через абстрактный вектор состояния лагерровой модели.

В данной статье выводится лагеррова модель типа «вход—выход» многомерной дискретной системы, связывающая непосредственно коэффициенты разложения входных и выходных сигналов системы. Найдены формулы перехода от разностного уравнения системы к лагерровой модели «вход—выход» и обратно.

Подстановка задачи. Пусть многомерная дискретная система представлена разностным уравнением n-го порядка, т. е. моделью типа «вход—выход»

$$\begin{gathered} A_n y(t+n)+A_{n-1}y(t+n-1)+\ldots+A_0 y(t)+ \\ +B_{n-1}u(t+n-1)+\ldots+B_0 u(t)=0, \qquad (1) \\ y(\tau)=u(\tau)=0, \quad \tau\leqslant n-1, \end{gathered}$$

где $u(t)\in R^m$, $y(t)\in R^p$ — векторы входа и выхода соответственно, матрицы $A_0, \ldots, A_n$ размерности $p\times p$ и $B_0, \ldots, B_{n-1}$ размерности $p\times m$, n — порядок системы.

Разлагая дискретные последовательности входных воздействий $\{u(t)\}$ и выходных переменных $\{y(t)\}$, $t=0, 1, 2, \ldots$ в ряд Фурье по разностным многочленам Лагерра

$$\psi_k(t)=\sqrt{1-\xi^2}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k+j}\binom{k}{j}\binom{t+k-j}{k}\xi^{t+k-2j},$$

где ξ — постоянная Лаггера, $\xi\in(-1, 1)$, $\binom{k}{j}$ — биномиальный коэффициент, получим дискретные последовательности лагерровых коэффициентов $\{u_k\}$ и $\{y_k\}$, $k=0, 1, 2, \ldots$.

Учитывая обстоятельство, что связь между коэффициентами разложения u_k и y_k представима линейной динамической системой порядка n [3], ищем лагеррову модель типа «вход—выход» в виде

$$F_n y_{k+n} + \ldots + F_0 y_k + G_n u_{k+n} + \ldots + G_0 u_k = 0, \qquad (2)$$

где $y_k \in R^p$, $u_k \in R^m$, матрицы $F_0, \ldots, F_n$ размерности $p \times p$ и $G_0, \ldots, G_n$ размерности $p \times m$.

Разностные многочлены Лагерра. Любая дискретная функция $f(t)$, $t=0, 1, 2, \ldots$ разложима в ряд Фурье по многочленам $\psi_k(t)$ в виде

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \psi_k(t), \qquad (3)$$

где коэффициенты разложения f_k определяются соотношением

$$f_k = \sum_{t=0}^{\infty} f(t) \psi_k(t). \qquad (4)$$

Вычисление многочленов $\psi_k(t)$ облегчают рекуррентные формулы [3]:

$$\psi_0(0) = \sqrt{1-\xi^2};$$

$$\psi_0(t+1) = \xi \psi_0(t),$$

$$\psi_k(t+1) = \xi \psi_k(t) + (1-\xi^2) \sum_{i=0}^{k-1} (-\xi)^{k-i-1} \psi_i(t). \qquad (5)$$

Учитывая свойство (5), получим следующее важное соотношение

$$\xi \psi_k(t+j) + \psi_{k+1}(t+j) = \psi_k(t+j-1) + \xi \psi_{k+1}(t+j-1), \quad j=1, 2, \ldots . \qquad (6)$$

Многократное применение соотношения (6) дает общую формулу смещения во временной области

$$\sum_{r=0}^{j} \binom{j}{r} \xi^{j-r} \psi_{k+r}(t+j) = \sum_{r=0}^{j} \binom{j}{r} \xi^r \psi_{k+r}(t), \quad j=1, 2, \ldots . \qquad (7)$$

Вывод лагерровой «вход—выход» модели. Умножая уравнение (1) на $\psi_k(t)$ и суммируя по $t=0, 1, 2, \ldots$, получим соотношения между векторами коэффициентов разложения дискретных функций $u(t)$ и $y(t)$ по разностным многочленам Лагерра

$$A_n y_k^{(n)} + \ldots + A_1 y_k^{(1)} + A_0 y_k + B_{n-1} u_k^{(n-1)} + \ldots + B_1 u_k^{(1)} + B_0 u_k = 0, \qquad (8)$$

где

$$y_k^{(j)} = \sum_{t=0}^{\infty} y(t+j) \psi_k(t), \quad j=1, \ldots, n,$$

$$u_k^{(i)} = \sum_{t=0}^{\infty} u(t+i) \psi_k(t), \quad i=1, \ldots, n-1.$$

По формуле (3)

$$y(t+j) = \sum_{l=0}^{\infty} y_l \psi_l(t+j).$$

На основании формулы смещения (7) имеем

$$\sum_{r=0}^{j}\binom{j}{r}\xi^r y_{k+r}^{(j)}=\sum_{t=0}^{\infty}y(t+j)\sum_{r=0}^{j}\binom{j}{r}\xi^r\psi_{k+r}(t)=$$

$$=\sum_{t=0}^{\infty}y(t+j)\sum_{r=0}^{j}\binom{j}{r}\xi^{j-r}\psi_{k+r}(t+j)=$$

$$=\sum_{r=0}^{j}\binom{j}{r}\xi^{j-r}y_{k+r}-\sum_{\tau=0}^{j-1}y(\tau)\sum_{r=0}^{j}\binom{j}{r}\xi^{j-r}\psi_{k+r}(\tau). \tag{9}$$

Рассматриваем сумму

$$S=\sum_{j=0}^{n}A_j\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\xi^r y_{k+r}^{(j)}+\sum_{i=0}^{n-1}B_i\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\xi^r u_{k+r}^{(i)}.$$

Учитывая свойство биномиальных коэффициентов

$$\binom{n}{r}=\sum_{\alpha=0}^{\beta}\binom{\beta}{\alpha}\binom{n-\beta}{r-\alpha},\quad \beta=1,\ \dots,\ n$$

и соотношение (9), получим при нулевых начальных условиях $y(\tau)=0$, $\tau=0,\ \dots\ ,\ n-1$

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\xi^r y_{k+r}^{(j)}=\sum_{h=0}^{n-j}\ \sum_{r=0}^{j}\binom{n-j}{h}\binom{j}{r}\xi^{j+h-r}y_{k+h+r}. \tag{10}$$

Аналогичное соотношение получим при нулевых начальных условиях $u(\tau)=0$, $\tau=0,\ \dots\ ,\ n-1$ для коэффициентов разложения входных воздействий.

На основании (10) сумма S равняется

$$S=\sum_{j=0}^{n}\sum_{h=0}^{n-j}\sum_{r=0}^{j}A_j\binom{n-j}{h}\binom{j}{r}\xi^{j+h-r}y_{k+h+r}+$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{h=0}^{n-i}\sum_{r=0}^{i}B_i\binom{n-i}{h}\binom{i}{r}\xi^{i+h-r}u_{k+h+r}, \tag{11}$$

а по (8) $S=0$.

Значит, соотношение (11) представляет собой лагеррово уравнение «вход—выход» в неявном виде. Переписав уравнение (11) в явном виде (2), получим следующие выражения для матриц F_i и G_i, $i=0,\ \dots\ ,\ n$

$$F_i=\sum_{j=0}^{n}\sum_{r=0}^{j}\binom{n-j}{i-r}\binom{j}{r}\xi^{i+j-2r}A_j, \tag{12}$$

$$G_i=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{j}\binom{n-j}{i-r}\binom{j}{r}\xi^{i+j-2r}B_j. \tag{13}$$

Отметим, что по определению биномиальных коэффициентов выражения (12) и (13) включают только те составляющие, при которых $n-j\geqslant i-r$ и $j\geqslant r$.

Заключение. Определена лагеррова модель типа «вход—выход» многомерной дискретной системы, а также ее связь с разностным уравнением n-го порядка.

Лагеррова модель «вход—выход» позволяет решить задачу идентификации посредством дискретного разложения Лагерра по следующей схеме: во-первых, найдем векторы коэффициентов разложения $\{u_k\}$ и

$\{y_k\}$, $k=0, \ldots, N$; $N \geqslant 2n$, во-вторых, обыкновенными методами идентификации определим матрицы F_i и G_i, $i=1, \ldots, n$, в-третьих, по формулам (12), (13) вычислим матрицы $A_0, \ldots, A_n$ и $B_0, \ldots, B_{n-1}$. Эта схема идентификации существенно отличается от предложенной в [1] процедуры и дает более хорошие результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Paraskevopoulos, P. N., King, R. E.* In: Identification and System Parameter Estimation, IV IFAC Symposium. Moscow, Part 2, 536—543, 1976.
2. *Hwang, R.-Y., Shih, Y.-P.* Int. J. Control, **37**, № 3, 615—622 (1983).
3. *Нургес Ю., Яаксоо Ю.* Автоматика и телемеханика, № 12, 28—30 (1981).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
27/III 1984