

Ю. НУРГЕС

ЛАГЕРРОВА МОДЕЛЬ «ВХОД—ВЫХОД»

O. NURGES. LAGUERRE'I SISEND-VALJUNDMUDEL

O. NURGES. INPUT-OUTPUT LAGUERRE MODEL

(Представил Н. Алумяэ)

Введение. Модели типа «вход—выход» наиболее подходящие для решения задач идентификации. Для сглаживания и сжатия входных и выходных сигналов динамической системы используется успешно их разложение по ортогональным многочленам Лагерра [1-3]. В [1] определены соотношения между коэффициентами разложения входных и выходных сигналов скалярной линейной системы через ее разностное уравнение n -го порядка. В [3] предложены лагерровы уравнения состояния, связывающие коэффициенты разложения входных воздействий и выходных переменных через абстрактный вектор состояния лагерровой модели.

В данной статье выводится лагеррова модель типа «вход—выход» многомерной дискретной системы, связывающая непосредственно коэффициенты разложения входных и выходных сигналов системы. Найдены формулы перехода от разностного уравнения системы к лагерровой модели «вход—выход» и обратно.

Подстановка задачи. Пусть многомерная дискретная система представлена разностным уравнением n -го порядка, т. е. моделью типа «вход—выход»

$$\begin{aligned} A_n y(t+n) + A_{n-1} y(t+n-1) + \dots + A_0 y(t) + \\ + B_{n-1} u(t+n-1) + \dots + B_0 u(t) = 0, \\ y(\tau) = u(\tau) = 0, \quad \tau \leq n-1, \end{aligned} \quad (1)$$

где $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^p$ — векторы входа и выхода соответственно, матрицы A_0, \dots, A_n размерности $p \times p$ и B_0, \dots, B_{n-1} размерности $p \times m$, n — порядок системы.

Разлагая дискретные последовательности входных воздействий $\{u(t)\}$ и выходных переменных $\{y(t)\}$, $t=0, 1, 2, \dots$ в ряд Фурье по разностным многочленам Лагерра

$$\psi_k(t) = \sqrt{1-\xi^2} \sum_{j=0}^k (-1)^{k+j} \binom{k}{j} \binom{t+k-j}{k} \xi^{t+k-2j},$$

где ξ — постоянная Лаггера, $\xi \in (-1, 1)$, $\binom{k}{j}$ — биномиальный коэффициент, получим дискретные последовательности лагерровых коэффициентов $\{u_k\}$ и $\{y_k\}$, $k=0, 1, 2, \dots$

Учитывая обстоятельство, что связь между коэффициентами разло-

жения u_k и y_k представима линейной динамической системой порядка n [3], ищем лагеррову модель типа «вход—выход» в виде

$$F_n y_{k+n} + \dots + F_0 y_k + G_n u_{k+n} + \dots + G_0 u_k = 0, \quad (2)$$

где $y_k \in R^p$, $u_k \in R^m$, матрицы F_0, \dots, F_n размерности $p \times p$ и G_0, \dots, G_n размерности $p \times m$.

Разностные многочлены Лагерра. Любая дискретная функция $f(t)$, $t=0, 1, 2, \dots$ разложима в ряд Фурье по многочленам $\psi_k(t)$ в виде

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \psi_k(t), \quad (3)$$

где коэффициенты разложения f_k определяются соотношением

$$f_k = \sum_{t=0}^{\infty} f(t) \psi_k(t). \quad (4)$$

Вычисление многочленов $\psi_k(t)$ облегчают рекуррентные формулы [3]:

$$\begin{aligned} \psi_0(0) &= \sqrt{1 - \xi^2}; \\ \psi_0(t+1) &= \xi \psi_0(t), \\ \psi_k(t+1) &= \xi \psi_k(t) + (1 - \xi^2) \sum_{i=0}^{k-1} (-\xi)^{k-i-1} \psi_i(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Учитывая свойство (5), получим следующее важное соотношение

$$\xi \psi_k(t+j) + \psi_{k+1}(t+j) = \psi_k(t+j-1) + \xi \psi_{k+1}(t+j-1), \quad j=1, 2, \dots \quad (6)$$

Многочленное применение соотношения (6) дает общую формулу смещения во временной области

$$\sum_{r=0}^j \binom{j}{r} \xi^{j-r} \psi_{k+r}(t+j) = \sum_{r=0}^j \binom{j}{r} \xi^r \psi_{k+r}(t), \quad j=1, 2, \dots \quad (7)$$

Вывод лагерровой «вход—выход» модели. Умножая уравнение (1) на $\psi_k(t)$ и суммируя по $t=0, 1, 2, \dots$, получим соотношения между векторами коэффициентов разложения дискретных функций $u(t)$ и $y(t)$ по разностным многочленам Лагерра

$$A_n y_k^{(n)} + \dots + A_1 y_k^{(1)} + A_0 y_k + B_{n-1} u_k^{(n-1)} + \dots + B_1 u_k^{(1)} + B_0 u_k = 0, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} y_k^{(j)} &= \sum_{t=0}^{\infty} y(t+j) \psi_k(t), \quad j=1, \dots, n, \\ u_k^{(i)} &= \sum_{t=0}^{\infty} u(t+i) \psi_k(t), \quad i=1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

По формуле (3)

$$y(t+j) = \sum_{l=0}^{\infty} y_l \psi_l(t+j).$$

На основании формулы смещения (7) имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^j \binom{j}{r} \xi^r y_{h+r}^{(j)} &= \sum_{t=0}^{\infty} y(t+j) \sum_{r=0}^j \binom{j}{r} \xi^r \psi_{h+r}(t) = \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} y(t+j) \sum_{r=0}^j \binom{j}{r} \xi^{j-r} \psi_{h+r}(t+j) = \\
&= \sum_{\tau=0}^j \binom{j}{r} \xi^{j-r} y_{h+r} - \sum_{\tau=0}^{j-1} y(\tau) \sum_{r=0}^j \binom{j}{r} \xi^{j-r} \psi_{h+r}(\tau). \quad (9)
\end{aligned}$$

Рассматриваем сумму

$$S = \sum_{j=0}^n A_j \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \xi^r y_{h+r}^{(j)} + \sum_{i=0}^{n-1} B_i \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \xi^r u_{h+r}^{(i)}.$$

Учитывая свойство биномиальных коэффициентов

$$\binom{n}{r} = \sum_{\alpha=0}^{\beta} \binom{\beta}{\alpha} \binom{n-\beta}{r-\alpha}, \quad \beta=1, \dots, n$$

и соотношение (9), получим при нулевых начальных условиях $y(\tau)=0$, $\tau=0, \dots, n-1$

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \xi^r y_{h+r}^{(j)} = \sum_{h=0}^{n-j} \sum_{r=0}^j \binom{n-j}{h} \binom{j}{r} \xi^{j+h-r} y_{h+h+r}. \quad (10)$$

Аналогичное соотношение получим при нулевых начальных условиях $u(\tau)=0$, $\tau=0, \dots, n-1$ для коэффициентов разложения входных воздействий.

На основании (10) сумма S равняется

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{j=0}^n \sum_{h=0}^{n-j} \sum_{r=0}^j A_j \binom{n-j}{h} \binom{j}{r} \xi^{j+h-r} y_{h+h+r} + \\
&+ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{h=0}^{n-i} \sum_{r=0}^i B_i \binom{n-i}{h} \binom{i}{r} \xi^{i+h-r} u_{h+h+r}, \quad (11)
\end{aligned}$$

а по (8) $S=0$.

Значит, соотношение (11) представляет собой лагеррово уравнение «вход—выход» в неявном виде. Переписав уравнение (11) в явном виде (2), получим следующие выражения для матриц F_i и G_i , $i=0, \dots, n$

$$F_i = \sum_{j=0}^n \sum_{r=0}^j \binom{n-j}{i-r} \binom{j}{r} \xi^{i+j-2r} A_j, \quad (12)$$

$$G_i = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{r=0}^j \binom{n-j}{i-r} \binom{j}{r} \xi^{i+j-2r} B_j. \quad (13)$$

Отметим, что по определению биномиальных коэффициентов выражения (12) и (13) включают только те составляющие, при которых $n-j \geq i-r$ и $j \geq r$.

Заключение. Определена лагеррова модель типа «вход—выход» многомерной дискретной системы, а также ее связь с разностным уравнением n -го порядка.

Лагеррова модель «вход—выход» позволяет решить задачу идентификации посредством дискретного разложения Лагерра по следующей схеме: во-первых, найдем векторы коэффициентов разложения $\{u_h\}$ и

$\{y_k\}$, $k=0, \dots, N$; $N \geq 2n$, во-вторых, обыкновенными методами идентификации определим матрицы F_i и G_i , $i=1, \dots, n$, в-третьих, по формулам (12), (13) вычислим матрицы A_0, \dots, A_n и B_0, \dots, B_{n-1} . Эта схема идентификации существенно отличается от предложенной в [1] процедуры и дает более хорошие результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Paraskevopoulos, P. N., King, R. E. In: Identification and System Parameter Estimation, IV IFAC Symposium. Moscow, Part 2, 536—543, 1976.
2. Hwang, R.-Y., Shih, Y.-P. Int. J. Control, **37**, № 3, 615—622 (1983).
3. Нургес Ю., Яаксоо Ю. Автоматика и телемеханика, № 12, 28—30 (1981).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
27/III 1984