EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1985, 34, 2

УДК 519.217.4, 517.977.56

Т. ТОБИАС

О ПРИБЛИЖЕННОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОБЛАСТИ ПО ЗНАЧЕНИЯМ СРЕДНЕГО ВРЕМЕНИ ВЫХОДА ИЗ НЕЕ ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА

T. TOBIAS. PIIRKONNA LIGIKAUDSEST MÄÄRAMISEST DIFUSIOONIPROTSESSI KESKMISE VÄLJUMISAJA JÄRGI

T. TOBIAS. APPROXIMATE DETERMINATION OF THE REGION ON THE BASIS OF THE MEAN EXIT TIME OF THE DIFFUSION PROCESS

(Представил Н. Алумяэ)

1. Пусть x_t — однородный n-мерный диффузионный процесс в R_n с производящим оператором $L=\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\dfrac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum\limits_{i=1}^{n} b_i(x)\dfrac{\partial}{\partial x_i}$. Пусть задана n-мерная область $\Omega\subset R_n$ с границей Γ, принадлежащей классу $C_{2,\alpha}$ (обозначения см. [1]). Допустим, что оператор L — равномерно эллиптический в области Ω, т. е. $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant c\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2$, $c>0$, $x\in\Omega$; и что $a_{ij}(x)\in C_{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $b_i(x)\in C_{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Наряду с оператором L будем рассматривать и сопряженный оператор $L^*u=\sum\limits_{i,j=1}^{n}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}(a_{ij}u)-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_i}(b_iu)$.

Пусть задана n-мерная область $E\subset\Omega$ с границей S, принадлежащей классу $C_{2,\alpha}$. Допустим, что в начальный момент $t=0$ $x_0=x\in E$. Пусть τ_x — время первого выхода процесса x_t из области E. Обозначим $u(x)=M\tau_x$. Известно, что $u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} &Lu=-1, \quad x\in E,\\ &u|_S=0. \end{aligned} \tag{1}$$

По сделанным предположениям $u(x)$ — классическое решение уравнения (1) и $u(x)\in C_{2,\alpha}(\bar{E})$.

Рассмотрим в некотором смысле обратную задачу. Пусть задана область $D\subset\Omega$ с гладкой границей γ и пусть на границе задана функция $g(x)\in C_{2,\alpha}(\gamma)$, $g(x)>0$. Ставим следующую задачу — определить область E с границей S так, чтобы

$$Lu=-1, \quad x\in E,$$
$$u|_S=0, \qquad u|_\gamma=g(x).$$

Без ограничения общности предположим, что $u(x)\equiv z(x)$ известна в области $\overline{D}$ как единственное классическое решение задачи $Lz=-1$, $x\in D$, $z|_\gamma=g(x)$.

Фактическая задача заключается в продолжении этого решения в более широкую область Ω. Если это удастся осуществить, то условие $u(x)=0$ можно принимать за определение неизвестной границы S. Мы не будем исследовать вопросы существования границы S и ее возможной гладкости. Вместо этого приведем два способа приближенного определения этой границы. При этом будем считать, что $E\subset\Omega$.

2. Рассмотрим следующую задачу граничного управления. Пусть

$$\begin{aligned} &Lu=-1, \quad x\in\Omega,\\ &u|_\Gamma=v(x), \end{aligned} \tag{2}$$

где $v(x)\in C_{2,\alpha}(\Gamma)$. В дальнейшем $\|v\|=\|v\|_{C_{2,\alpha}(\Gamma)}$. Обозначим решение (2) через $u=u(x,v)$ и ставим задачу определения граничного управления $v(x)$ так, чтобы

$$J(v)=\int_D [u(x,v)-z(x)]^2\,dx\to\min.$$

Подобную задачу можно исследовать методами, изложенными в [2], и рассмотреть ее при гораздо более общих предположениях (например, при $v\in L_2(\Gamma)$). Мы ограничимся выводом приращения функционала $J(v)$, с помощью которого строятся приближенные методы градиентного типа.

Обозначим через χ_D характеристическую функцию множества D. Тогда

$$J(v_1)-J(v_2)=2\int_\Omega \chi_D[u(x,v_2)-z(x)]\,[u(x,v_1)-u(x,v_2)]\,dx+$$
$$+o(\|v_1-v_2\|).$$

Последнее слагаемое вытекает из неравенства Шаудера [1], выражающего оценку нормы решения (2) через норму граничного значения.

Функция $\delta u=u(x,v_1)-u(x,v_2)$ удовлетворяет уравнению $L(\delta u)=0$, $\delta u|_\Gamma=v_1-v_2$. Введем сопряженное состояние $p=p(x,v)$ с помощью уравнения

$$\begin{aligned} &L^*p=2\chi_D[u(x,v)-z(x)], \quad x\in\Omega;\\ &p|_\Gamma=0. \end{aligned} \tag{3}$$

Теперь с помощью формулы Грина легко получить, что

$$\begin{aligned} J(v_1)-J(v_2)&=\int_\Omega L^*p(x,v_2)\,\delta u\,dx+o(\|v_1-v_2\|)=\\ &=\int_\Gamma \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)N_j(x)\,\frac{\partial p(x,v_2)}{\partial x_i}\,(v_1(x)-v_2(x))\,ds+o(\|v_1-v_2\|), \end{aligned} \tag{4}$$

где $N=(N_1,\ldots,N_n)$ — внешняя нормаль к поверхности Γ.

Обозначим $c_i(x)=\sum_{j=1}^n a_{ij}(x)N_j(x)$. Тогда из (4) получим, что оптимальное граничное управление v^* (если, конечно, оно существует) удовлетворяет следующему необходимому условию:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(x) \frac{\partial p(x, v^*)}{\partial x_i} = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{5}$$

Разностные аналоги градиентного метода можно построить, исходя из формулы (4).

Если известно оптимальное v^*, при котором $J(v^*) = 0$, то неизвестную границу Γ можно определить из условия $u(x, v^*) = 0$.

3. Рассмотрим другой способ определения неизвестной границы S, который впервые был применен в [3].

Фиксируем исходную гладкую границу S_0 и рассмотрим семейство областей E_λ с гладкими границами $S_\lambda = \{x_\lambda : x_\lambda = x + \lambda(x) n(x), x \in S_0\}$. Здесь $\lambda(x) \in C_{1,\alpha}(S)$ и $n(x)$ — внешняя нормаль к границе S_0. Пусть $u_\lambda = u(x, \lambda)$ — решение уравнения $Lu_\lambda = -1$, $x \in E_\lambda$, $u_\lambda|_{S_\lambda} = 0$. Обозначим $u_\lambda|_{S_0} = w$ и найдем соотношение между $\lambda(x)$ и $w(x)$. По формуле Тейлора (в области $E_0 \setminus E_\lambda$ это будет определением функции w)

$$w(x) = u_\lambda|_{S_0} = u_\lambda|_{S_\lambda} - \frac{\partial u_\lambda}{\partial n}|_{S_\lambda} \lambda(x) + o(\|\lambda\|).$$

Так как $u_\lambda(x) \in C_{2,\alpha}(\bar{E}_\lambda)$, то $\lim\limits_{\|\lambda\| \to 0} \frac{\partial u_\lambda}{\partial n}|_{S_\lambda} = \frac{\partial u_0}{\partial n}|_{S_0}$. Поэтому, аналогично формуле (4) получим

$$J(\lambda) - J(0) = -\int_{S_0} \sum_{i=1}^{n} c_i(x) \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial u_0}{\partial n} \lambda(x)\, ds + o(\|\lambda\|), \tag{6}$$

где $p(x)$ удовлетворяет уравнению

$$L^* p(x) = 2\chi_D [u_0(x) - z(x)], \quad x \in E_0, \quad p|_{S_0} = 0.$$

Формула (6) позволяет последовательно вычислить приближения S_0, $S_1, \ldots$ к неизвестной границе S.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., «Наука», 1964.
2. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., «Мир», 1972.
3. *Pironneau, O.* J. Fluid Mech., **59**, part 1, 117—128 (1973).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
5/III 1984