EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1985, 34, 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1985.2.08

УДК 534.2; 532.135

А. СТУЛОВ

ОБ ОТРАЖЕНИИ АКУСТИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА ОТ ЛИНЕЙНОЙ НАСЛЕДСТВЕННОЙ СРЕДЫ С *Е*-ПАМЯТЬЮ

(Представил Н. Алумяэ)

Рассмотрим процесс отражения одномерного акустического импульса, который зависит от лагранжевой координаты X и времени t, от границы раздела двух полупространств A и B. Область $X\leqslant L_A$ — однородная линейная упругая среда A, область $X>L_A$ — однородная линейная наследственная среда B с E-памятью, ядро ползучести которой задано формулой [1]

$$K(t)=\frac{\varepsilon_B}{\tau_{KB}}\left(1+\frac{\varepsilon_B t}{4\tau_{KB}}\right)\exp\left(-t/\tau_{KB}\right), \tag{1}$$

где ε_B и τ_{KB} — наследственные параметры среды B.

В среде A в точке $X=0$ задано краевое условие в виде

$$F_{A1}(0,t)=\Phi(t), \tag{2}$$

где $F_{A1}(X,t)$ — функция, определяющая перемещение, скорость или напряжение в волне деформации $A1$, распространяющейся в среде A в положительном направлении оси X. Начальные условия для волны $A1$ выберем нулевые.

Из [1] следует, что отраженная от среды B волна $A2$, распространяющаяся в среде A в отрицательном направлении оси X, определяется формулой

$$F_{A2}(X,\tau_1)=H(\tau_1)\left[V_0\Phi(\tau_1)+\frac{\varepsilon_B Z}{(Z+1)^2}\exp\left(-p\tau_1\right)\int_0^{\tau_1}\Phi(\xi)\exp\left(p\xi\right)d\xi\right] \tag{3}$$

с использованием обозначений

$$p=1+\varepsilon_B Z/2(Z+1), \tag{4}$$

$$V_0=(Z-1)/(Z+1), \tag{5}$$

$$Z=\varrho_A c_A/\varrho_B c_B, \tag{6}$$

где ϱ_A, ϱ_B, c_A, c_B — плотности и скорости звука сред A и B, $H(\tau_1)$ — функция Хевисайда, τ_1 — безразмерное расстояние от фронта волны

$$\tau_1=\tau-\tau_L=t/\tau_{KB}-(2L_A-X)/c_A\tau_{KB}. \tag{7}$$

Пусть $\tau_0=t_0/\tau_{KB}$ — положение первого максимума функции $\Phi(\tau)$ в падающей волне $A1$, определяемое условиями

$$\Phi^{\cdot}(\tau_0)=0, \qquad \Phi(\tau_0)=\Phi_0. \tag{8}$$

Часто реальные среды являются слабонаследственными, т. е. для таких сред значение параметра $\varepsilon_B \ll 1$. Учитывая это обстоятельство, определим сдвиг положения максимума $\Delta\tau$ в отраженной волне $A2$, полагая, что он смещается незначительно ($\Delta\tau \ll 1$).

Обозначая новое положение максимума функции $F_{A2}(X, \tau_1)$ через $\tau_* = \tau_0 + \Delta\tau$, из (3) найдем

$$F^{\cdot}_{A2}(X, \tau_*) = V_0 \Phi^{\cdot}(\tau_*) + \frac{\varepsilon_B Z}{(Z+1)^2} \Phi(\tau_*) -$$

$$- \frac{\varepsilon_B Z p}{(Z+1)^2} \exp(-p\tau_*) \int_0^{\tau_*} \Phi(\xi) \exp(p\xi)\, d\xi = 0. \tag{9}$$

Раскладывая функции $\Phi(\tau_*)$ и $\Phi^{\cdot}(\tau_*)$ в ряд Тейлора и сохраняя только члены первого порядка по степеням $\Delta\tau$ и ε_B, найдем

$$V_0 \Phi^{\cdot\cdot}(\tau_0) \Delta\tau + \frac{\varepsilon_B Z}{(Z+1)^2} [\Phi_0 - \Phi(\tau_0) * \exp(-\tau_0)] = 0, \tag{10}$$

где использовано обозначение интеграла свертки

$$f(x) * g(x) = \int_0^x f(\xi) g(x - \xi)\, d\xi. \tag{11}$$

Так как $\Phi^{\cdot\cdot}(\tau_0) < 0$ для функции, которая в точке τ_0 имеет максимум, то из (10) получим

$$\Delta\tau = \frac{\varepsilon_B Z [\Phi_0 - \Phi(\tau_0) * \exp(-\tau_0)]}{(Z^2 - 1)\, |\Phi^{\cdot\cdot}(\tau_0)|}. \tag{12}$$

Эта формула справедлива при условиях

$$\varepsilon_B \ll 1, \qquad \left| \frac{Z}{Z^2 - 1} \right| \lesssim 1. \tag{13}$$

Например, для краевого условия

$$\Phi(\tau) = \alpha\tau \exp(1 - \alpha\tau), \tag{14}$$

для которого $\tau = t/\tau_{KB}$, $\tau_0 = \alpha^{-1}$, из (12) получим

$$\Delta\tau = \frac{\varepsilon_B Z \tau_0^2}{(Z^2 - 1)(\tau_0 - 1)^2} [1 - \tau_0 \exp(1 - \tau_0)], \tag{15}$$

что совпадает с результатом, который можно получить точно, проинтегрировав (3) для краевого условия (14).

Максимальный сдвиг положения максимума достигается при $\alpha = 0{,}228$ ($\tau_0 = 4{,}385$) и равен

$$\Delta\tau_{\max} = 1{,}429 \frac{\varepsilon_B Z}{Z^2 - 1}. \tag{16}$$

Для случая синусоидального краевого условия

$$\Phi(\tau) = \sin g\tau, \tag{17}$$

где $g = \omega\tau_{KB}$ — безразмерная частота, найдем по формуле (12) новое положение максимума в отраженной волне $A2$.

$$\tau_*=\tau_0+\frac{\varepsilon_B Z[g-\exp(-\tau_0)]}{(Z^2-1)g(1+g^2)}, \tag{18}$$

где

$$\tau_0=\pi/2g. \tag{19}$$

Формула (18) проверялась путем точного вычисления функции $F_{A2}(X, \tau_1)$ по формуле (3) для случая краевого условия (17). На частоте $g=0{,}817$, для которой $\tau_0=1{,}923$, и при значениях параметров $\varepsilon_B=0{,}1$, $Z=3$ положение максимума, вычисленное по формуле (3), оказалось равным $\tau_*=1{,}940$. Формула (18) дает величину $\tau_*=1{,}941$. Совпадение получилось достаточно хорошим.

Простая формула (18) позволяет по результатам эксперимента, в котором измерен сдвиг максимума в отраженной волне, определить наследственные параметры среды с E-памятью. Посылая два синусоидальных сигнала с разной частотой

$$\Phi_1(t)=\sin\omega_1 t, \tag{20}$$

$$\Phi_2(t)=\sin\omega_2 t, \tag{21}$$

из (18) найдем положения максимумов в отраженной волне для каждой из частот

$$t_i=\frac{\pi}{2\omega_i}+\frac{\varepsilon_B Z[g_i-\exp(-\pi/2g_i)]}{(Z^2-1)\omega_i(1+g_i^2)}, \tag{22}$$

где $g_i=\omega_i\tau_{KB}$ и $i=1,2$.

Зная t_1 и t_2, из системы уравнений (22) можно определить наследственные параметры среды ε_B и τ_{KB}.

Систему уравнений (22) можно и не решать, а поступить следующим образом.

Анализ функции

$$f(x)=\frac{x-\exp(-\pi/2x)}{1+x^2} \tag{23}$$

показывает, что она является всюду положительной при $x>0$ и достигает максимума при $x=a_0=0{,}8152$, в то же время $f(a_0)=b_0=0{,}4023$. Изменяя частоту волны $A1$ до тех пор пока сдвиг максимума t_0 в отраженной волне не будет наибольшим, сразу найдем из (22)

$$\tau_{KB}=\frac{a_0}{\omega_1}, \tag{24}$$

$$\varepsilon_B=\frac{Z^2-1}{Zb_0}\left(\omega t_0-\frac{\pi}{2}\right). \tag{25}$$

Таким образом, положение максимума в отраженной волне $A2$ несет информацию о наследственной среде B, параметры которой могут быть определены экспериментально.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нигул У. К., Стулов А. С.* Волны в слоистых линейных наследственных средах. Таллин, РИСО АН ЭССР, 1985.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
30/VIII 1984

A. STULOV

AKUSTILISE IMPULSI PEEGELDUMISEST *E*-MÄLUGA LINEAARSELT PÄRILIKULT KESKKONNALT

Lineaarses elastses keskkonnas leviv ühemõõtmeline impulss muudab oma kuju, peegeldudes lineaarse mäluga keskkonna piirilt. Seejuures leiab aset impulsi amplituudi maksimaalväärtuse asukoha siire. Artiklis on tuletatud valem suvalise kujuga impulsi amplituudi maksimumkoha siirde kirjeldamiseks tema peegeldumisel *E*-mäluga keskkonna piirilt ning näidatud, et siirde suuruse järgi on võimalik määrata mäluga keskkonda iseloomustavate parameetrite väärtusi.

A. STULOV

ON ACOUSTIC PULSE REFLECTION FROM LINEAR HEREDITARY MEDIUM WITH *E*-MEMORY

The shape of the one-dimensional acoustic pulse in linear elastic medium is changed by reflection from linear viscoelastic half-space. In addition to this reflection the peak of the pulse takes the shift. The formula describing the variable of this shift for any shape of the pulse reflecting from linear viscoelastic medium with *E*-memory, is derived in this article. It is shown that it is possible to find the two viscoelastic parameters of the medium from the value of the peak-shift.