EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1985, 34, 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1985.2.06

УДК 519.3:51:62-50

И. КЕЙС

ЛИНЕЙНОЕ НЕАВТОНОМНОЕ АГРЕГИРОВАНИЕ В СУБОПТИМАЛЬНОМ СИНТЕЗЕ УПРАВЛЕНИЙ

(Представил Н. Алумяэ)

Рассмотрено линейное неавтономное агрегирование по координатам многомерной линейной системы с квадратичным критерием, обобщающее стационарное агрегирование [1-5]. Получены субоптимальные регуляторы задачи и оценки модуля агрегирующей компоненты. Предложены условия точной декомпозиции системы в агрегирующих и дополнительных переменных и модификация формулы Лиувилля. Проведено исследование условия декомпозиции в его упрощенной форме (субоптимальная сепарация) как ограничения на класс допустимых матриц агрегирования в задаче поиска наилучших субоптимальных управлений по показателям вероятностного типа [3, 5].

1. Постановка задачи и агрегирование исходной модели

Рассмотрим задачу минимизации по u функционала

$$2f(t_0, x_0\,|\,u) = x_1^{\mathrm{T}}P_1x_1 + \int\limits_{t_0}^{t_1}(x^{\mathrm{T}}Qx + u^{\mathrm{T}}Ru)\,d\tau, \quad \dim x = n \gg 1 \tag{1.1}$$

$$P_1 = P[t_1] \geqslant 0, \quad Q[t] = Q^{\mathrm{T}} > 0, \quad R[t] = R^{\mathrm{T}} > 0,$$
$$\dim u = r\,(x_\alpha = x(t_\alpha),\ \alpha = 0,1)$$

в общем случае неавтономной линейной n-мерной системы

$$\dot{x} = A[t]x + B[t]u; \quad x = (x_i)^{\mathrm{T}}; \quad u = (u_\sigma)^{\mathrm{T}}\,(i, s = \overline{1, n};\ \sigma = \overline{1, r}),$$
$$A = [a_{is}(t)], \quad B = [b_{is}(t)]; \quad A, B, Q, R \subset C[t_0, t_1], \tag{1.2}$$
$$-\infty < t_0 < t_1 \leqslant \infty; \quad t_0, t_1, x_0 - fix\ \mathrm{const}.$$

В реальных условиях имеем два основных случая — случай неполной информации по x — когда измеряется его m-мерная компонента

$$y = (y_\nu)^{\mathrm{T}} = F(t)x, \quad F = (m \times n), \quad \mathrm{rank}\,F \overset{\Delta}{=} r_F = m < n, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \tag{1.3}$$

и случай полной информации $y = x$ $(F = \mathbf{1}_n{}^n,\ \nu = \overline{1, m})$. Случай линейно-зависимых y $(r_F < m)$ не имеет практического интереса. Согласно критерию Грама условие на сигнальную матрицу $r_F = m$ эквивалентно положительности $FF^{\mathrm{T}} > 0$, когда есть обратная $(FF^{\mathrm{T}})^{-1}$. Ниже при любой матрице $M(k \times n)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ учтем эквивалентность

$$\mathrm{rank}\,M = k \sim MM^{\mathrm{T}} > 0 \quad (\det MM^{\mathrm{T}} > 0 \Leftrightarrow \exists\,(MM^{\mathrm{T}})^{-1}). \tag{1.4}$$

Проведем в основных случаях агрегирование задачи (1.1)—(1.2) для уменьшения ее размерности $n \gg 1$, 2 и, соответственно, объема памяти и вычислений на ЭВМ. В отличие от [1-6] применим линейную нестационарную (функциональную) агрегацию с матрицами $C(t)$, $G(t)$ вида

$$z=G(t)x,\quad G=C(t)F,\quad G=(l\times n),\quad C=(l\times m);\quad F=(m\times n)\ (l\ll n)$$

$$GG^{\mathrm{T}}>0,\quad CC^{\mathrm{T}}>0,\quad t_0\leqslant t\leqslant t_1\ (1\leqslant l\leqslant m\leqslant n) \tag{1.5}$$

и точную линейную z-декомпозицию объекта (2), когда для A, G (1.2) существует линейная z-автономная при $u\equiv 0$ подсистема

$$z^{\cdot}=\bar{A}z+\bar{B}u=(G^{\cdot}+GA)x+\bar{B}u\,(\bar{A}^{l}_{l}=\bar{A}(t),\ \bar{B}^{r}_{l}=GB). \tag{1.6}$$

Равенство (1.6) верно лишь, если A, G, $\bar{A}$ удовлетворяют условию

$$G^{\cdot}+GA=\bar{A}G\quad (G(t)=(l\times n),\quad A=A(t)), \tag{1.7}$$

что эквивалентно ввиду (1.5) равенству (1.8) и $l(n-l)$-независимым условиям на A, G вида

$$\bar{A}=(G^{\cdot}+GA)G^{\mathrm{T}}(GG^{\mathrm{T}})^{-1}, \tag{1.8}$$

$$\bar{P}_0\bar{Q}_0=(G^{\cdot}+GA)\,[G^{\mathrm{T}}(GG^{\mathrm{T}})^{-1}G-1^{n}_{n}]={}_{l}0^{n},$$

$$\bar{P}_0\stackrel{\Delta}{=}(G^{\cdot}+GA),\quad \bar{Q}_0\stackrel{\Delta}{=}[G^{\mathrm{T}}(GG^{\mathrm{T}})^{-1}G-1^{n}_{n}], \tag{1.9}$$

где $\bar{Q}_0$ — симметричная неположительная матрица ранга $n-l$ с $(n-l)$-кратным собственным (-1) и l-кратным нулевым числом, которому отвечает l-мерное собственное подпространство с базисом из $\operatorname{col} G^{\mathrm{T}}$. Поэтому условие (1.9) эквивалентно равенству с произвольной $(l\times l)$-мерной матрицей $W(t,\cdot)$,

$$\text{где } G^{\cdot}+GA=WG. \tag{1.10}$$

Из (1.6),(1.8), (1.10) находим, что z-подсистема и (1.7) должны удовлетворять

$$z^{\cdot}=\bar{A}z+\bar{B}u,\quad G^{\cdot}=\bar{A}G-GA\quad (\bar{A}\equiv W), \tag{1.11}$$

где достаточно считать $\bar{A}$ независящей от G, полагая для линейности по G, что $\bar{A}=\bar{A}(t)$. Произвол выбора $\bar{A}(t)$ используется в оптимизации приближенного решения исходной задачи. Матрицант $G(t,\cdot)$, заданный (1.11), имеет вид

$$G(t,\tau)=\Phi_{\bar{A}}G(\tau,\tau)\Phi^{-1}_{A}(t,\tau),\quad r_G=r_{G\tau}=l,\quad G_\tau\stackrel{\Delta}{=}G(\tau,\tau),\quad \Phi_{\bar{A}}(t)=(l\times l), \tag{1.12}$$

где $\Phi_{\bar{A}}(t)$, $\Phi_A(t)$ — переходные матрицы, отвечающие уравнениям

$$\Phi^{\cdot}_{\bar{A}}=\bar{A}\Phi_{\bar{A}},\quad \Phi_{\bar{A}}(\tau,\tau)=1^{l}_{l};\quad \Phi^{\cdot}_{A}=A\Phi_{A},\quad \Phi_{A}(\tau,\tau)=1^{n}_{n}\quad (t_0\leqslant\tau\leqslant t_1).$$

Легко показать, что $r[G(t,\cdot)]=l$, если $rG_\tau=l$. Это следует также из (1.12) и модификации формулы Лиувилля при $l\leqslant n$. С целью ее вывода рассмотрим аналогичное (1.11) уравнение

$$\hat{G}^{\cdot}=\hat{A}\hat{G}+\hat{G}\hat{B}\quad (\hat{G}=\hat{G}(t,\cdot)=(l\times n),\ l\leqslant n).$$

Введем матрицу $M\stackrel{\Delta}{=}\hat{G}\hat{G}^{\mathrm{T}}$, определенную уравнением

$$M^{\cdot}=\hat{A}M+M\hat{A}+\hat{G}P\hat{G}^{\mathrm{T}},\quad \hat{P}\stackrel{\Delta}{=}\hat{B}+\hat{B}^{\mathrm{T}},\quad M\stackrel{\Delta}{=}\Phi^{\mathrm{T}}_{\hat{A}}N\Phi^{\mathrm{T}}_{\hat{A}}\quad (M=M^{\mathrm{T}}),$$

$$N^{\cdot}=S\hat{P}S,\ N=SS^{\mathrm{T}},\ S=\hat{G}_\tau\Psi_{\hat{B}}={}_{l}(l\times n),\ N(\tau,\cdot)=SS^{\mathrm{T}}|_{t=\tau}=(l\times l); \tag{1.13}$$

$$\Phi^{\cdot}_{\hat{A}}=\hat{A}\Phi_{\hat{A}},\ \Phi_{\hat{A}}(\tau,\tau)=1^{l}_{l};\qquad \Psi^{\cdot}_{\hat{B}}\stackrel{\Delta}{=}\Psi_{\hat{B}}\hat{B},\ \Psi_{\hat{B}}(\tau,\tau)=1^{n}_{n}\quad (t_1\leqslant\tau\leqslant t_2).$$

Так как $r_S = l$, то из (1.4), (1.13) имеем N^{-1} и равенства

$$N^{\cdot}=[S\hat{P}S^{\mathrm{T}}N^{-1}]N \quad (\Delta X \stackrel{\Delta}{=} \det X), \qquad (\Delta N)^{\cdot}=\mathrm{tr}[S\hat{P}S^{\mathrm{T}}N^{-1}]\Delta N, \tag{1.14}$$

в которых найдем след матрицы $S\hat{P}S^{\mathrm{T}}N^{-1}$, учитывая, что следы X, $\hat{T}X\hat{T}^{-1}$ одинаковые при $\Delta\hat{T} \neq 0$. Так как $N > 0$ и $N^{\cdot}$ — симметрические, то имеем матрицу $T(l \times l)$, $r(T) = l$, $\Delta T \neq 0$, такую, что

$$S\hat{P}S^{\mathrm{T}}=T^{*-1}\Lambda T^{-1}; \quad N=SS^{\mathrm{T}}=T^{*-1}T^{-1}, \quad \Lambda=\mathrm{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_l),$$

$$\Lambda=T^*S\hat{P}S^{\mathrm{T}}T=Q^*\hat{P}Q, \quad Q\stackrel{\Delta}{=}S^{\mathrm{T}}T \quad (Q^*\stackrel{\Delta}{=}Q^{\mathrm{T}},\ T^*\stackrel{\Delta}{=}T^{\mathrm{T}}), \tag{1.15}$$

$$\chi(\beta)\stackrel{\Delta}{=}|S\hat{P}S^{\mathrm{T}}-\beta N|=0 \Rightarrow \beta_\lambda, \quad \lambda=\overline{1, l}; \quad S\hat{P}S^{\mathrm{T}}N^{-1}=T^{*-1}\Lambda T^*.$$

Согласно (1.15) матрица $Q(n \times l)$ — обобщенно-ортогональная $Q^*Q = \mathbf{1}_l^l$ вида

$$Q^*=[Q_1^*|0_l^{n-l}], \quad Q_1^*Q_1=\mathbf{1}_l^l, \quad Q_1=(l\times l), \quad Q_1^{\mathrm{T}}\stackrel{\Delta}{=}Q^*. \tag{1.16}$$

Из (1.15), (1.16) находим равенства

$$\mathrm{tr}\, S\hat{P}S^{\mathrm{T}}N^{-1}=\mathrm{tr}\,\Lambda=\mathrm{tr}\,Q_1^*P_{11}^*Q_1=\mathrm{tr}\,\hat{P}_{11}=2\,\mathrm{tr}\,\hat{B}_{11}, \tag{1.17}$$

$$\hat{P}=\begin{bmatrix}\hat{P}_{11} & \hat{P}_{12}\\ \hat{P}_{21} & \hat{P}_{22}\end{bmatrix}, \quad \hat{P}_{11}=(l\times l); \quad \hat{B}=\begin{bmatrix}\hat{B}_{11}, & \hat{B}_{12}\\ \hat{B}_{21}, & \hat{B}_{22}\end{bmatrix}, \quad \hat{B}_{11}=(l\times l),$$

в силу которых (1.14) принимает вид $(\Delta N)^{\cdot} = 2\,\mathrm{tr}\, B_{11}(\Delta N)$. С учетом (1.13) из (1.17) находим для G модификацию формулы Лиувилля

$$\Delta M=\Delta M(\tau)\exp 2\int_\tau^t \mathrm{tr}\,[\hat{A}(\sigma)+\hat{B}_{11}(\sigma)]\,d\sigma \quad (M\stackrel{\Delta}{=}\hat{G}\hat{G}^{\mathrm{T}}) \tag{1.18}$$

при $\hat{G}^{\cdot}=\hat{A}\hat{G}+\hat{G}\hat{B}$, $\hat{G}=(l\times n)$, $\hat{A}=(l\times l)$, $\hat{B}=(n\times n)$, $1\leqslant l\leqslant n$, доказывающую, что $r\hat{G}(t,\tau)=r(G_\tau)=l$. Из (1.17) следует также, что сумма корней β_i характеристического уравнения в (1.15) равна удвоенному следу субматрицы $\hat{B}_{11}(l\times l)$ в $\hat{B}$ при любом выборе S ранга l. Собственные числа субматрицы $\hat{B}_{11}+\hat{B}_{11}^{\mathrm{T}}$ совпадают с корнями $\chi(\beta) = 0$ при $r(S) = l$. В случае (1.11) из (1.18) имеем

$$\Delta^{\cdot}[GG^{\mathrm{T}}]=2\Delta[GG^{\mathrm{T}}]\,\mathrm{tr}\,[\bar{A}-A_{11}], \quad A_{11}=(l\times l), \quad A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}. \tag{1.19}$$

При G-линейности (1.11) в случае точной z-линейной декомпозиции (1.2) необходимо и достаточно задать матрицу декомпозиции G согласно (1.12) при произвольной постоянной G_τ ранга l. Альтернативные случаи (1.3) неразличимы в (1.11) и ниже рассматриваются вместе. Их различие — в смысле матриц агрегации C и декомпозиции G. При измерении всех x_i они совпадают $C = G$, а класс допустимых $C(l\times n)$ находим из (1.12) заменой $G\to C$, $G_\tau\to C_\tau$, $r(C) = l$. В сигнальном случае ($CF = G$, $m < n$) ввиду (1.12) матрицы C, F связаны конфликтным по свободе их выбора условием

$$\bar{C}\hat{F}=G_\tau=\mathrm{const};\quad \bar{C}=\Phi^{-1}_{\bar{A}}C,\qquad \hat{F}=F(t)\Phi_A(t,\tau). \qquad (1.20)$$

Для выполнения (1.20) необходимо и достаточно, чтобы

$$\bar{C}=G_\tau\hat{F}^{\mathrm{T}}(\hat{F}\hat{F}^{\mathrm{T}})^{-1},\quad G_\tau\hat{Q}={}_l0^n\quad (\hat{Q}\overset{\Delta}{=}\underset{n}{1^n}-\hat{F}^{\mathrm{T}}(\hat{F}\hat{F}^{\mathrm{T}})^{-1}\hat{F}). \qquad (1.21)$$

Второе из (1.21) верно лишь при $G_\tau=S\hat{F}$ с произвольной $S(l\times n)$. Последнее, в частности, означает, что строки взятой G_τ — линейные комбинации строк F. Аналогично (1.8), (1.9), собственные числа $\hat{Q}$ суть m-кратный нуль и $(n-m)$-кратная единица. Используя субматрицы S^0, S^1 диагонализирующей $\hat{Q}$ ортогональной $S(n\times n)$-матрицы

$$S=[S^0|S^1],\quad S^0=\hat{F}^{\mathrm{T}}\hat{N}=(n\times m),\quad \hat{N}\hat{N}^{\mathrm{T}}=(\hat{F}\hat{F}^{\mathrm{T}})^{-1},$$

сводим второе равенство (1.21) к системе $l\times(n-m)$ независимых равенств

$$G_\tau S^1={}_l0^N,\quad \hat{F}S^1={}_m0^N,\quad S^1=[s^{m+1},\ \ldots,\ s^n]=(n\times N), \qquad (1.22)$$

$$r(S^1)=N\overset{\Delta}{=}n-m,\quad s^\mu=[s_{i\mu}],\quad \mu=\overline{m+1,n},\quad i=\overline{1,n};\quad S^{0\mathrm{T}}S^1={}_m0^N.$$

Максимально освобождая $\hat{F}(m\times n)$ (1.20), из (1.21) получим

$$C=\Phi_{\bar{A}}\bar{C}=\Phi_{\bar{A}}G_\tau\hat{F}^{\mathrm{T}}(\hat{F}\hat{F}^{\mathrm{T}})^{-1}\quad (\bar{C}=\Phi^{-1}_{\bar{A}}C,\ \hat{F}=F\Phi_A). \qquad (1.23)$$

Для выполнения (1.22) необходимо и достаточно, чтобы сигнальные матрицы $F(t)$ составляли допустимый класс, определенный равенствами

$$F=\bar{P}\begin{bmatrix}G_\tau\\ \bar{\Pi}\end{bmatrix}\Phi^{-1}_A,\ r\begin{bmatrix}G_\tau\\ \bar{\Pi}\end{bmatrix}=m,\ \Delta\bar{P}\neq0;\ \bar{P}(m\times m),\ \bar{\Pi}^n_{m-l}\text{ — произвольны.} \qquad (1.24)$$

Вид допустимых матриц агрегации C находим подстановкой (1.24) в (1.23). Всякая F-матрица, в частности, $\hat{F}$, $F(t)$ в (1.24), сводится нормирующей матрицей $N^{\mathrm{T}}(m\times m)$, $NN^{\mathrm{T}}=(FF)^{-1}$ к обобщенно-ортогональной $F^*=N^{\mathrm{T}}F$, где $F^*F^{*\mathrm{T}}=1_m{}^m$. Используя вместо y вектор $\hat{y}=\hat{N}^{\mathrm{T}}y$, заменим $\hat{F}$ в (1.20)—(1.24) на $\hat{F}^*=\hat{N}^{\mathrm{T}}\hat{F}$. Тогда класс допустимых C согласно (1.23), (1.24) и $\hat{F}\to\hat{F}^*$ имеет вид

$$C=C^*=\Phi_{\bar{A}}G_\tau\hat{F}^*\quad\text{при}\quad \hat{F}\to\hat{F}^*,\quad \hat{F}^*\hat{F}^{*\mathrm{T}}=\underset{m}{1^m}\Leftrightarrow\hat{N}\hat{N}^{\mathrm{T}}=(\hat{F}\hat{F}^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

При условии свободы выбора C, достигаемой $(l\times m)$-дополнительными ограничениями на F, надо различать подсигнальную $(l<m)$- и эквисигнальную $(l=m)$-агрегацию. С учетом (1.20) и произвола C из

$$CF=G=\Phi_{\bar{A}}G_\tau\Phi^{-1}_{A}\quad (\Phi_{\bar{A}}=\Phi_{\bar{A}}(t,\tau),\ \Phi_A=\Phi_A(t,\tau);\ G_\tau=G(\tau,\tau)) \qquad (1.25)$$

имеем при любых C, $r(C)=l$ совокупность допустимых $F(t)$-матриц

$$F=C^{\mathrm{T}}(CC^{\mathrm{T}})^{-1}G+D\bar{F}_0,\quad \bar{F}_0=(d\times n)\text{ — произвольная }\bar{F}_0(t) \qquad (1.26)$$

$$D:CD={}_l0^d,\quad r(D)=d\overset{\Delta}{=}m-l,\quad D=(m\times d).$$

Значения (1.26) обращают (1.25) в тождество и необходимы. В эквисигнальном случае решение C-однородной системы тривиально в отличие от подсигнального случая, где $DF_0 \neq 0$. При F, заданных (1.26), нет никаких дополнительных условий на допустимые C, G.

2. Агрегирование по функционалу

Примем упрощение $P = \alpha^2(t)Q$. Введем дополняющую z-компоненту y из координат $y_\nu, y = (y_\nu)^\mathrm{T}$, $z = (z_\lambda)^\mathrm{T}$, $\nu = \overline{1, N}$; $\lambda = \overline{1, l}$ вида

$$y = Hx, \quad r(H) = N \overset{\Delta}{=} n - l, \quad H = (N \times n), \quad T \overset{\Delta}{=} \begin{bmatrix} G \\ H \end{bmatrix}, \quad \Delta T \neq 0, \tag{2.1}$$

где col G^T, H^T удовлетворяют на $\mathfrak{T} \overset{\Delta}{=} [t_0, t_1]$ условию Q^{-1}-ортогональности

$$GQ^{-1}H^\mathrm{T} = {}_l0^N \sim Q = G^\mathrm{T}[GQ^{-1}G^\mathrm{T}]^{-1}G + H^\mathrm{T}[HQ^{-1}H^\mathrm{T}]^{-1}H, \tag{2.2}$$

эквивалентному разделению по z, y в $\xi = Tx$ квадрик $x^\mathrm{T}Qx$, $x^\mathrm{T}Px$:

$$x^\mathrm{T}Qx = \xi^\mathrm{T}\tilde{Q}\xi = z^\mathrm{T}\tilde{Q}_1z + y^\mathrm{T}\tilde{Q}_2y, \quad x_1^\mathrm{T}P_1x_1 = \xi_1^\mathrm{T}\tilde{P}_1\xi_1 = \alpha_1^2(z_1^\mathrm{T}\tilde{Q}_{11}z_1 + y_1^\mathrm{T}\tilde{Q}_{21}y_1, \tag{2.3}$$

$$S = T^\mathrm{T}\tilde{S}T, \quad \Psi(x) \overset{\Delta}{=} \tilde{\Psi}(\xi) = \tilde{\Psi}(Tx), \quad \tilde{Q}_{\gamma 1} \overset{\Delta}{=} \tilde{Q}_\gamma[t_1], \quad \xi_1 \overset{\Delta}{=} \xi[t_1], \quad \gamma = 1, 2,$$

$$\tilde{Q}_1 \overset{\Delta}{=} (GQ^{-1}G^\mathrm{T})^{-1} > 0, \quad r(\tilde{Q}_1) = l; \quad \tilde{Q}_2 = (HQ^{-1}H^\mathrm{T})^{-1}, \quad r(\tilde{Q}_2) = N.$$

В силу (2.1) — (2.3) функционал (1.1) принимает вид

$$\mathfrak{f} = \tilde{\mathfrak{f}} = \tilde{\mathfrak{f}}_1 + \tilde{\mathfrak{f}}_2; \quad 2\tilde{\mathfrak{f}}_1 = z_1^\mathrm{T}\tilde{P}_{11}z_1 + \int_{t_0}^{t_1} (z^\mathrm{T}\tilde{Q}_1z + u^\mathrm{T}Ru)\,d\tau, \tag{2.4}$$

$$2\tilde{\mathfrak{f}}_2 = y_1^\mathrm{T}\tilde{P}_{21}y_1 + \int_{t_0}^{t_1} y^\mathrm{T}\tilde{Q}_2y\,d\tau \quad (\tilde{P}_{\gamma 1} = \alpha_1^2 Q_{\gamma 1}, \ \alpha_1^2 = \alpha^2[t_1], \ \alpha^2 \geqslant 0).$$

С учетом (1.2), (1.11), (2.1) $z[t]$, $y[t]$ — компоненты ξ удовлетворяют системе

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u, \quad \dot{y} = \hat{F}z + \bar{\bar{A}}y + \bar{\bar{B}}u \quad (\bar{B} = GB, \ \bar{\bar{B}} = HB), \tag{2.5}$$

$$\hat{F} = (\dot{H} + HA)T_1^{-1}, \quad \bar{\bar{A}} = (\dot{H} + HA)T_2^{-1}, \quad T^{-1} \overset{\Delta}{=} [T_1^{-1} | T_2^{-1}], \quad T_1^{-1} = (n \times l),$$

$$\dot{G} = \bar{A}G - GA, \quad G = \Phi_{\bar{A}}G_1\Phi_{\bar{A}}^{-1}; \quad G_1 = G[t_1, \cdot], \quad r(G) = l, \quad TT^{-1} \overset{\Delta}{=} 1_n^n,$$

$$\Phi_C : \dot{\Phi}_C = C\Phi_C, \quad \Phi(\tau, \tau, \cdot) = 1_k^k, \quad \forall C = (k \times k) \ (\Phi(t_1, t_3) = \Phi(t_1, t_2)\Phi(t_2, t_3)).$$

Согласно (2.4) введем в переменных ξ агрегат функционала (1.1)

$$2\bar{\mathfrak{f}} = z_1^\mathrm{T}\bar{P}_{11}z_1 + \int_{t_0}^{t_1} (z^\mathrm{T}\bar{Q}_1z + u^\mathrm{T}Ru)\,d\tau \to \min_u 2\bar{\mathfrak{f}} \overset{\Delta}{=} 2\bar{S} = 2\bar{\mathfrak{f}}(\cdot | u^*), \quad u^* \overset{\Delta}{=} \operatorname*{argmin}_u \bar{\mathfrak{f}}, \tag{2.6}$$

где $\bar{Q}_1 = \tilde{Q}_1 + \Gamma$. $\Gamma^\mathrm{T} = \Gamma$ — компенсационную матрицу невязки найдем ниже. Трактуя l-мерную z-автономную подсистему (2.5) с критерием (2.6) как агрегат системы (1.1), (1.2), получим ее оптимальный регулятор u^* и оптимум $\bar{S}$ агрегации

$$u^* = -R^{-1}\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{M}z;\quad \bar{S} = \bar{J}(\cdot\,|\,u^*) \overset{\Delta}{=} \bar{J}^* = 1/2z^{\mathrm{T}}\bar{M}z \quad (\bar{M}^{\mathrm{T}} = \bar{M}(t) = (l\times l)),\tag{2.7}$$

где матрицант $\bar{M}(t,\cdot)$ — краевое решение матричного уравнения

$$\bar{M}^{\cdot} = \bar{M}\bar{B}R^{-1}\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{M} - (\bar{A}^{\mathrm{T}}\bar{M} + \bar{M}\bar{A}) - \bar{Q},\quad \bar{M}(t_1, t_1, \cdot) = \alpha_1^2\bar{Q}_{11}.\tag{2.8}$$

Замыкая (2.4), (2.5), эквивалентные (1.1), (1.2), ее субоптимальным регулятором (2.7), получим модель и квадрику субоптимума (2.4)

$$z^{\cdot} = \bar{A}^*z,\quad y^{\cdot} = \bar{\bar{A}}y + \hat{F}^*z,\quad \bar{S}^* \overset{\Delta}{=} \bar{J}(\cdot, u^*) = 1/2\xi^{\mathrm{T}}\bar{L}\xi,\tag{2.9}$$

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{M}} & \bar{R} \\ \bar{R}^{\mathrm{T}} & \bar{K} \end{bmatrix},\quad \bar{A}^* = \bar{A} - \bar{\bar{B}}R^{-1}\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{M},\quad \hat{F}^* = \hat{F} - \bar{B}R^{-1}\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{M},$$

$$(\bar{\bar{M}}(l\times l),\ \bar{R}(l\times N);\ \bar{K}(N\times N)),$$

где $\bar{K}$, $\bar{R}$, $\bar{\bar{M}}$ — решения последовательно связанных линейных уравнений

$$-\bar{K}^{\cdot} = \bar{\bar{A}}^{\mathrm{T}}\bar{K} + \bar{K}\bar{\bar{A}} + \bar{Q}_2,\quad \bar{K}_1 = \alpha_1^2 Q_{21}\quad (\bar{Q}_2 = (HQ^{-1}H^{\mathrm{T}})^{-1},\ \bar{Q}_{\nu 1} = \bar{Q}_{\nu}[t_1]),\tag{2.10}$$

$$-\bar{R}^{\cdot} = \hat{F}^{*\mathrm{T}}\bar{K} + \bar{A}^{*\mathrm{T}}\bar{R} + \bar{R}\bar{\bar{A}},\quad \bar{R}_1 = 0$$

$$(\bar{Q}_1 = (GQ^{-1}G^{\mathrm{T}})^{-1},\ \bar{R}_1 = \bar{R}[t_1],\ \bar{K}_1 = \bar{K}[t_1]),$$

$$-\bar{\bar{M}}^{\cdot} = \bar{Q}_1 + \bar{\bar{M}}\bar{A}^* + \bar{A}^{*\mathrm{T}}\bar{\bar{M}} + \bar{R}\hat{F}^* + \hat{F}^{*\mathrm{T}}\bar{R}^{\mathrm{T}} + \bar{M}^{\mathrm{T}}\bar{B}R^{-1}\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{M},\quad \bar{\bar{M}}_1 = \alpha_1^2\bar{Q}_{11}.$$

Матрица Г дана условием $\bar{\bar{M}} \equiv \bar{M}$ эквивалентным из (2.8)—(2.10) равенству

$$\Gamma = \bar{R}\hat{F}^* + \hat{F}^{*\mathrm{T}}\bar{R}^{\mathrm{T}}\quad (\Gamma^{\mathrm{T}} \equiv \Gamma).\tag{2.11}$$

Из уравнения на $\bar{R}$ следует, что $\bar{R} \equiv 0$ лишь при $\hat{F}^* = \hat{F} - \bar{\bar{B}}R^{-1}\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{M} = 0$. Тогда в силу (2.6)—(2.11) получаем упрощения

$$\Gamma \equiv 0,\quad \bar{Q}_1 \equiv \bar{Q}_1;\quad \bar{M} = \bar{\bar{M}}\quad \text{при}\quad \hat{F} = \hat{F}_* \overset{\Delta}{=} \bar{\bar{B}}R^{-1}\bar{B}^{\mathrm{T}}M.\tag{2.12}$$

Согласно (2.1), (2.5) матрицы H, $\bar{\bar{A}}$, $\hat{F}$ удовлетворяют связи

$$H^{\cdot} + HA - \bar{\bar{A}}H = \hat{F}G.\tag{2.13}$$

При произвольной $\bar{\bar{A}}$ и данной G из совместности (2.13) для H необходимо

$$(H^{\cdot} + HA - \bar{\bar{A}}H)[G^{\mathrm{T}}(GG^{\mathrm{T}})^{-1}G - 1_n^n] = {}_N0^n\quad (N = n - l).\tag{2.14}$$

Аналогично (1.7)—(1.11) ограничимся в (2.13), (2.14) при $\hat{F} = \hat{F}_*(t)$ случаем линейной по H связи

$$H^{\cdot} = \bar{\bar{A}}H - H\Omega,\quad H = \Phi_{\bar{\bar{A}}}H_1\Phi_{\Omega}^{-1};\quad \Omega \overset{\Delta}{=} A - \omega,\quad \omega \overset{\Delta}{=} \bar{\bar{B}}R^{-1}\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{M}G.\tag{2.15}$$

Обратно, если определить $H = H(t)$ уравнением (2.15), то при $u = u^*$ выполняются тождества (2.12), $\bar{R} \equiv 0$, $\hat{F} \equiv \hat{F}_*$, а подсистемы на $z(t)$, $y(t)$, $\bar{\bar{M}}(t)$, $\bar{K}(t)$ в (2.9), (2.10) разделяются

$$\dot z=\bar A^* z,\quad \dot y=\bar{\bar A} y\quad (G=\Phi_{\bar A} G_1\Phi_{\bar A}^{-1},\ H=\Phi_{\bar{\bar A}} H_1\Phi_{\Omega}^{-1},\ H_1=H(t_1,\cdot)),\tag{2.16}$$

$$-\dot{\tilde M}=\bar A^{*\mathrm T}\tilde M+\tilde M\bar A^*+\tilde Q_1+\bar M^{\mathrm T}\bar B R^{-1}\bar B^{\mathrm T}\bar M,\quad \tilde M_1=\alpha_1^2\tilde Q_{11}\quad (\tilde M=\bar M),$$

$$-\dot{\tilde K}=\bar{\bar A}^{\mathrm T}\tilde K+\tilde K\bar{\bar A}+\tilde Q_2,\quad \tilde K_1=\alpha_1^2\tilde Q_{21};\quad \bar{\bar A}(N\times N)\ \text{— произвольная}\ \bar{\bar A}(t).$$

С учетом равенств и обозначений (2.4), (2.9) функционал (1.1) на u^* в t, ξ при геометрическом условии (2.2) имеет вид

$$2f^*(u^*\,|\,t,\xi)\overset{\Delta}{=}2\tilde S^*(t,\xi)=z^{\mathrm T}\tilde M z+y^{\mathrm T}\tilde K y\quad (GQ^{-1}H^{\mathrm T}={}_l0^N).\tag{2.17}$$

Оценки модуля $z(t)$-компоненты $x(t)$ на $\mathfrak{T}$

Рассмотрим оптимум агрегации $\bar S$ и $\dot{\bar S}$ в силу (2.16)

$$\bar S=1/2z^{\mathrm T}\bar M z,\quad -\dot{\bar S}=1/2z^{\mathrm T}\hat Q_1 z\quad (\hat Q_1=\tilde Q_1+\bar M G B R^{-1}B^{\mathrm T}G^{\mathrm T}\bar M>0).\tag{2.18}$$

Существует $z=V[t]v$ преобразование, приводящее (2.18) к виду

$$2S=\sum_{\lambda=1}^{l}v_\lambda^2,\quad -2\dot S=\sum_{\lambda=1}^{l}k_\lambda^2 v_\lambda^2,\quad -k_l^2(t)S\leqslant\dot S\leqslant -k_1^2(t)S\,(S(v)=S(z)),$$

$$V^{\mathrm T}\bar M V=1_l^l,\quad V^{\mathrm T}\hat Q_1 V=\operatorname{diag}k_\lambda^2,\tag{2.19}$$

$$\chi(k^2)\overset{\Delta}{=}|\hat Q_1-k^2\bar M|=0<k_1^2=\min k^2\leqslant k_l^2=\max k^2.$$

Из (2.18) и (2.19) получаем неравенства

$$2S/m_l^2\leqslant\|z\|^2\leqslant 2S/m_1^2,\quad \xi(m^2)\overset{\Delta}{=}|\bar M-m^2 1_l^l|=0<m_1^2=\min m^2$$

$$(t_0\leqslant t\leqslant t_1),\tag{2.20}$$

$$S_0\exp\left[-\int_{t_0}^{t}k_l^2(\tau)\,d\tau\right]\leqslant S\leqslant S_0\exp\left[-\int_{t_0}^{t}k_1^2(\tau)\,d\tau\right]\quad (m_l^2=\max m^2),$$

$$m_{10}^2\leqslant 2S_0\|z_0\|^{-2}\leqslant m_{l0}^2\quad (m_{\alpha 0}\overset{\Delta}{=}m_\alpha(t_0),\ m_\alpha=m_\alpha(t),\ S_0=\bar S(t_0),\ \alpha=1;l).$$

Согласно (2.19), (2.20) норма $z(t)$-компоненты удовлетворяет оценкам на $\mathfrak{T}$ вида

$$m_{10}^2 m_l^{-2}\exp\int_t^{t_0}k_l^2\,d\tau\leqslant\|z_0\|^{-2}\|z\|^2\leqslant m_{l0}^2\,m_0^{-2}(t)\exp\int_t^{t_0}k_1^2\,d\tau,\tag{2.21}$$

где на $\tau_j\in\mathfrak{T}$ возможен численный поиск $m_\lambda{}^2(\tau_j)$, $k^2(\tau_j)$ ввиду малости $l\ll n$ $(j=\overline{0,p}<\infty,\ \tau_p=t_1$ при $t_1<+\infty)$.

3. Условие декомпозиции и его упрощение (субоптимальная сепарация)

Рассмотрим ограничения на (1.2) и матрицы $\bar A$, G_1 согласно (2.2). В силу (1.25), (2.15) это условие эквивалентно

$$G_1\Phi_{A}^{-1}Q^{-1}\Phi_{\Omega}^{-1}H_1^{\mathrm T}={}_l0^N\quad (\text{при } t=t_1 \text{ имеем } G_1Q_1^{-1}H_1^{\mathrm T}={}_l0^N),\tag{3.1}$$

$$H^{\mathrm{T}}_{1}=Q_1P_1W^0_1,\quad P_1=P_1(G_1):G_1P_1={}_l0^N,\quad P^{\mathrm{T}}_1P_1=1^N_N,\quad W^0(N\times N)=W^0[t],$$

$$G^{\mathrm{T}}_1(G_1G^{\mathrm{T}}_1)^{-1}G_1+P_1P^{\mathrm{T}}_1=1^n_n,\quad P_1=\mathrm{const},\quad \Delta W^0[t]\neq 0,\quad W^0_1=W^0[t_1],$$

где $W^0[t]$ — произвольная $(N\times N)$-матрица на $\mathfrak{T}$.

Введем $U(l\times l)$, $V(N\times N)$ — произвольные матриканты t ранга l, N и обозначим

$$\bar{G}_1\overset{\Delta}{=}(G_1G^{\mathrm{T}}_1)^{-1/2}G_1,\quad N^{\mathrm{T}}\overset{\Delta}{=}[\bar{G}^{\mathrm{T}}_1|P_1],\quad U_1=1^l_l,\quad V_1=1^N_N,\quad N^{\mathrm{T}}N=1^n_n, \tag{3.2}$$

$$R\overset{\Delta}{=}[\bar{G}^{\mathrm{T}}_1|P_1]\begin{bmatrix}U & 0\\ 0 & V\end{bmatrix}\left[\frac{\bar{G}_1}{P^{\mathrm{T}}_1}\right]\overset{\Delta}{=}N^{\mathrm{T}}WN,\quad W\overset{\Delta}{=}\begin{bmatrix}U & 0\\ 0 & V\end{bmatrix}=(n\times n).$$

Равенство (3.1) выполнено лишь, если $\Phi_A{}^{-1}Q^{-1}\Phi_\Omega{}^{-1}Q_1=R$. Отсюда по смыслу $\Phi_\Omega{}^{-1}$ необходимо и достаточно, чтобы R удовлетворяла

$$R^{\cdot}=-\Psi^{-1}[\Omega^{\mathrm{T}}\Psi+\Psi^{\cdot}]R,\quad \Psi\overset{\Delta}{=}Q\Phi_A,\quad R_1\overset{\Delta}{=}R[t_1,\cdot]=1^n_n. \tag{3.3}$$

Учитывая (3.2), из (3.3) находим

$$W^{\cdot}=MW,\quad M=\begin{bmatrix}M_{11} & M_{12}\\ M_{21} & M_{22}\end{bmatrix}\overset{\Delta}{=}N\theta N^{\mathrm{T}},\quad \theta\overset{\Delta}{=}\Psi^{-1}[(\omega^{\mathrm{T}}-A^{\mathrm{T}})\Psi-\Psi^{\cdot}], \tag{3.4}$$

$$M_{11}=\bar{G}_1\theta\bar{G}^{\mathrm{T}}_1,\quad M_{12}=\bar{G}_1\theta P_1,\quad M_{21}=P^{\mathrm{T}}_1\theta\bar{G}^{\mathrm{T}}_1,\quad M_{22}=P^{\mathrm{T}}_1\theta P_1,\quad \omega=BR^{-1}B^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}\bar{M}G.$$

В силу (3.4) и структуры W заключаем, что (3.1) верно лишь, если

$$M_{12}(\theta)={}_l0^N,\quad M_{21}(\theta)={}_N0^l. \tag{3.5}$$

Тогда уравнения (3.4) на U, V совместны, разделяются и $U(t)=\Phi(M_{11})$, $V(t)=\Phi(M_{22})$, $\Phi_A\overset{\Delta}{=}\Phi(A)$. Но (3.5) верны лишь при равенстве $\theta=R^{\cdot}R^{-1}$, эквивалентном ввиду (3.2)—(3.4) параметрическому представлению множества допустимых (3.1) матриц A, B, Q, R, $\bar{A}$, G_1 уравнением

$$\omega^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+(\Psi R)^{\cdot}(\Psi R)^{-1}, \tag{3.6}$$

где используются формулы и обозначения (2.15), (3.1)—(3.3). Связь (3.6) примет вид (3.7) в обозначениях (3.8)

$$\hat{B}\hat{X}=\hat{C}+K\hat{Y}K^{-1}\quad\text{при}\quad r(B)=r(R)=r=l, \tag{3.7}$$

$$\hat{B}=\hat{B}^{\mathrm{T}}\overset{\Delta}{=}BR^{-1}B^{\mathrm{T}},\quad \hat{X}\overset{\Delta}{=}G^{\mathrm{T}}\bar{M}(t,G,\cdot)G,\quad K\overset{\Delta}{=}Q^{-1}\Phi_A^{-1\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}}, \tag{3.8}$$

$$\hat{C}=A-Q^{-1}[Q^{\cdot}+A^{\mathrm{T}}Q],\quad N^{\mathrm{T}}(G_1)=[G^{\mathrm{T}}_1(G_1G^{\mathrm{T}}_1)^{-1/2}|P_1],$$

$$\hat{Y}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}U^{\cdot}U^{-1} & 0\\ 0 & V^{\cdot}V^{-1}\end{bmatrix},\quad \bar{B}=B\bar{T},\quad \bar{R}=\bar{T}^{\mathrm{T}}R\bar{T},\quad r(\bar{T})=l,\quad \bar{T}=(r\times l).$$

Ранговые равенства в (3.7) получим агрегацией $u=\bar{T}\tilde{u}$ в (3.8), сохраняя за $\tilde{u}$, $\bar{B}$, $\bar{R}$ исходные обозначения. Подставив в (3.7) его частное решение $\hat{X}=\hat{X}_0$ вида

$$\hat{X}_0=B(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}R(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}(\hat{C}+K\hat{Y}K^{-1})\quad(\Delta(B^{\mathrm{T}}B)\neq 0;\ r(B)=l) \tag{3.9}$$

найдем условия совместности (3.7)

$$[B(B^{\mathsf T}B)^{-1}B^{\mathsf T}-1^n_n]\,[\hat C+K\hat YK^{-1}]={0}^n_n, \tag{3.10}$$

эквивалентные независимым связям $\hat R[\hat C+K\hat YK^{-1}]={}_N0^n$, где $(N\times n)$-матрица $\hat R(B)$ — любая, удовлетворяющая равенствам

$$\hat RB={}_N0^l,\quad \hat R\hat R^{\mathsf T}=1^N_N,\quad \hat R^{\mathsf T}\hat R=1^n_n-B(B^{\mathsf T}B)^{-1}B^{\mathsf T}. \tag{3.11}$$

Решая (3.10), (3.11) относительно $\hat C$, приводим условия существования $\hat X$ в уравнении (3.7) к $\hat F$ — параметрическому виду допустимых A, B, Q, R с произвольной непрерывной $(l\times n)$-матрицей $\hat F(t)$

$$\hat C=B\hat F+[B(B^{\mathsf T}B)^{-1}B^{\mathsf T}-1^n_n]K\hat YK^{-1},\quad \partial\hat F/\partial G_1=0. \tag{3.12}$$

Здесь и ниже в силу (3.8) необходимо условие $\partial\hat C/\partial G_1=0$. (3.13)

Упрощенный вид условия декомпозиции (3.6) (субоптимальная сепарация)

Достаточным и близким к необходимому простым условием выполнения (3.13) является равенство

$$K\hat YK^{-1}=\lambda 1^n_n+B\hat V\ \left(\text{где } \frac{\partial\lambda}{\partial G_1}=0,\ \text{а матрица } \hat V^n_l(t,G_1)\ \text{— произвольная}\right), \tag{3.14}$$

эквивалентное $\hat Y=\lambda 1^n_n+K^{-1}B\hat VK$, где ${}_n\hat Y^n$ — произвольная вида (3.8). Обозначим

$$r_{\hat A}=l,\quad \hat A_1=(l\times l),\quad \hat A_2=(N\times l);\quad \hat A=\begin{bmatrix}\hat A_1\\ \hat A_2\end{bmatrix}\overset{\Delta}{=}K^{-1}B,\quad \bar V\overset{\Delta}{=}\hat VK. \tag{3.15}$$

Согласно (3.8), (3.15) матрицы $\bar V$, $\hat Y$, $\hat C$ в (3.12), (3.14) примут вид

$$\bar V=[\hat H_1\bar W_1|\hat H_2\bar W_2];\quad \hat H_1(l\times d_1):\hat A_2\hat H_1={}_N0^{d_1},\quad d_1\overset{\Delta}{=}l-r(\hat A_2)\geqslant 0, \tag{3.16}$$

$\hat H_2(l\times d_2):\hat A_1\hat H_2={}_l0^{d_2}$, $d_2\overset{\Delta}{=}l-r(\hat A_1)\geqslant 0$; $\bar W_1(d_1\times l)$, $\bar W_2(d_2\times N)$ — произвольны,

$$\hat Y=\hat Y_1\overset{\Delta}{=}\lambda 1^n_n+K^{-1}B\bar V;\ \hat C=\hat C(\hat Y_1)\overset{\Delta}{=}\hat C_1=B\hat F+\lambda[B(B^{\mathsf T}B)^{-1}B^{\mathsf T}-1^n_n]\ (\lambda\geqslant 0),$$

где $d_1+d_2=2l-r(\hat A_1)-r(\hat A_2)$, $\partial\lambda/\partial G_1\equiv 0$; $\lambda;\hat F(l\times n)$ — произвольные.

Заданная в (3.8), (3.16) связь A, Q удовлетворяется при преобразовании $x\to\tilde x$. Из (3.7), (3.16) в классе (3.14) находим упрощенный вид допустимых $G(t,t_1,G_1|\bar A,\cdot)$:

$$G^{\mathsf T}\bar MG=B(B^{\mathsf T}B)^{-1}R[\lambda(B^{\mathsf T}B)^{-1}+\hat F+\hat V]+\hat R^{\mathsf T}\bar N^{\mathsf T}\bar NR\quad (r(\bar N)\leqslant l), \tag{3.17}$$

где $\quad \hat C+K\hat Y_1K^{-1}=B[\hat F+\lambda(B^{\mathsf T}B)^{-1}B^{\mathsf T}+\hat V]$, $\lambda\geqslant 0$, $\bar N=(N\times N)$

$\bar{N}=\bar{N}(t,\cdot)$ — произвольная матрица. Из симметрии $\hat{X}$ необходимо, чтобы

$$B(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}R[\hat{F}-\hat{V}]=[\hat{F}-\hat{V}]R(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}. \tag{3.18}$$

Условие (3.18) выполнено, если $\hat{F}, \hat{V}$ задать равенствами

$$\hat{F}=\hat{\Psi}R(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}},\quad 0\leqslant\hat{\Psi}^{\mathrm{T}}=\hat{\Psi}(l\times l) \text{ — произвольная матрица,} \tag{3.19}$$

$$\hat{V}=\hat{M}R(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}K,\quad 0\leqslant\hat{M}^{\mathrm{T}}=\hat{M}(l\times l) \text{ — совместная с (3.16) матрица.}$$

В связи с (3.19) рассмотрим существование $\hat{M}_1(l\times l)$ в равенствах

$$\hat{M}_1=\hat{M}_1^{\mathrm{T}},\quad \hat{M}_1S=\hat{H}_1\hat{W}_1\quad (S_l^n=R(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}},\ r_S=l;\ \hat{W}_\gamma\stackrel{\Delta}{=}\bar{W}_\gamma K_\gamma^{-1},\ \gamma=1,2). \tag{3.20}$$

Ввиду $\Delta(SS^{\mathrm{T}})\neq 0$ существует единственное решение (3.20) вида $\hat{M}_1$ в (3.21) при условии совместности (3.22), получаемого из них подстановкой

$$\hat{M}_1=\hat{H}_1\hat{W}_1S^{\mathrm{T}}(SS^{\mathrm{T}})^{-1}, \tag{3.21}$$

$$\hat{H}_1\hat{W}_1[1_n^n-S^{\mathrm{T}}(SS^{\mathrm{T}})^{-1}S]=0_l^n. \tag{3.22}$$

Отсюда необходимо, чтобы $\hat{H}_1\hat{W}_1=\hat{T}_1S$, где $\hat{T}_1(l\times l)$ — произвольна. Умножая (3.22) на $\hat{H}_1^{\mathrm{T}}$ слева, получим $\hat{W}_1=\bar{M}_1S$, где $\bar{M}_1(d_1\times l)$ — произвольная. При этом необходимо и достаточно, чтобы $\hat{M}=\hat{H}_1\bar{M}_1$. С учетом симметрии и неотрицательности $\hat{M}_1$ примем $M_1=\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_1^{\mathrm{T}}\hat{H}_1^{\mathrm{T}}$, где $\tilde{\omega}_1=(d_1\times l)$ — произвольная матрица, $r(\tilde{\omega}_1)=d_1$; $r(\hat{M}_1)\leqslant d_1$. Поэтому вопрос $\exists\hat{M}_1$ сводится к существованию $\bar{W}_1$ в равенстве

$$\bar{W}_1K_1^{-1}=R_1=\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_1^{\mathrm{T}}\hat{H}_1^{\mathrm{T}}S\quad (\hat{W}_1=\bar{M}_1S=\bar{W}_1K_1^{-1}), \tag{3.23}$$

где небходимо в силу $r(K_1^{-1})\stackrel{\Delta}{=}\operatorname{rank}K_1^{-1}=l$, чтобы

$$\bar{W}_1=R_1K_1^{-1}(K_1^{-1}K_1^{-1\mathrm{T}})^{-1}\sim R_1[1_n^n-K_1^{-1\mathrm{T}}(K_1^{-1}K_1^{-1\mathrm{T}})K_1^{-1}]=0_{d_\perp}^n. \tag{3.24}$$

Считая $\tilde{\omega}_1$ свободной в (3.23), необходимо условие принять

$$\hat{H}_1^{-\mathrm{T}}S=\hat{Q}_1K_1^{-1},\ \text{где}\ \hat{Q}_1(d_1\times l) \text{ — произвольная матрица.} \tag{3.25}$$

При (3.25) условие (3.24) совместности (3.23) выполнено, причем

$$\bar{W}_1=\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_1^{\mathrm{T}}\hat{H}_1^{\mathrm{T}},\quad \hat{M}_1=\hat{H}_1\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_1^{\mathrm{T}}\hat{H}_1^{\mathrm{T}}. \tag{3.26}$$

Сменой индекса $1\to 2$ аналогично (3.20)—(3.26) находим условия существования $\hat{M}_2$ для $\hat{M}=\hat{M}_1+\hat{M}_2=(l\times l)$. Ниже в (3.16), (3.17) допустимы лишь параметры λ, $\hat{\Psi}$, $\bar{N}$, $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, при которых ранг (3.17) есть l. Усиленные условия z, y, $\bar{M}$, $\bar{K}$ разделения (3.17), (3.25), (3.26) при $u=u_*$ на $\bar{A}$, G_1 и параметры системы (1.2) кратко назовем условиями субоптимальной сепарации.

4. Выбор наилучшего субоптимального управления u^*

Из (2.16), (2.17) имеем в t, ξ субоптимум системы (1.1), (1.2) в виде

$$\bar{S}^* \stackrel{\triangle}{=} \bar{f}(t, \xi | u^*) = 1/2(z^{\mathrm{T}}\bar{M}z + y^{\mathrm{T}}\bar{K}y) \quad (\bar{M} = \bar{M}(t)). \tag{4.1}$$

Переходя в (4.1) от t, ξ к переменным t, x получим

$$S^* = f(t, x | u^*) = 1/2 x^{\mathrm{T}}Lx; \quad L = L'_1 + L'_2, \quad L'_1 = G^{\mathrm{T}}\bar{M}G, \quad L'_2 = H^{\mathrm{T}}\bar{K}H,$$
$$L'_{11} = \alpha_1^2 G_1^{\mathrm{T}}\bar{Q}_{11}G_1, \quad L'_{21} = \alpha_1^2[Q_1 - G_1^{\mathrm{T}}\bar{Q}_{11}G_1], \tag{4.2}$$
$$L = \begin{bmatrix} G \\ H \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \bar{M} & 0 \\ 0 & \bar{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \\ H \end{bmatrix} \quad (L'_{\gamma 1} = L'_{\gamma}(t_1),\ \gamma = 1, 2).$$

Так как L, L'_1 не зависят от свободных параметров $\bar{\bar{A}}$, $W_1{}^0$ матрицы H в (2.16), (3.1), то геометрически очевидна независимость от них L'_2. Действительно, из (2.2), (2.10), (4.2), (2.16) выводим равенство

$$L'_2 = \Phi_{\Omega}^{-1\mathrm{T}}[t]\left\{L'_{21} - \int_t^{t_1} \Phi_{\Omega}^{\mathrm{T}}[Q - G^{\mathrm{T}}(GQ^{-1}G^{\mathrm{T}})^{-1}G]\Phi_{\Omega}\,d\tau\right\}\Phi_{\Omega}^{-1}[t], \tag{4.3}$$

доказывающее утверждение. Для L_1 с учетом (2.15), (2.18) получаем

$$-\dot{L}'_1 = \Omega^{\mathrm{T}}L'_1 + L'_1\Omega + G^{\mathrm{T}}\hat{Q}_1 G$$
$$(\hat{Q}_1 = \bar{Q}_1 + \bar{M}GBR^{-1}B^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}\bar{M},\ \bar{Q}_1 = (GQ^{-1}G^{\mathrm{T}})^{-1}), \tag{4.4}$$
$$L'_1 = \Phi_{\Omega}^{-1\mathrm{T}}[t]\left\{L'_{11} - \int_t^{t_1} \Phi_{\Omega}^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}\hat{Q}_1 G\Phi_{\Omega}\,d\tau\right\}\Phi_{\Omega}^{-1}[t], \ +\Omega \stackrel{\triangle}{=} -BR^{-1}\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{M}G + A.$$

Сложением L'_2, L'_1 в (4.3), (4.4) находим функционал от $\bar{A}$, G_1

$$L(t, t_1 | \bar{A}, G_1) =$$
$$= \Phi_{\Omega}^{-1\mathrm{T}}(t)\left\{\alpha_1^2 Q_1 + \int_t^{t_1} \Phi_{\Omega}^{\mathrm{T}}[Q + G^{\mathrm{T}}\bar{M}GBR^{-1}B^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}\bar{M}G]\Phi_{\Omega}\,d\tau\right\}\Phi_{\Omega}^{-1}(t) \tag{4.5}$$

$$L'_{11} \stackrel{\triangle}{=} L'_1(t_1; t_1, \cdot) = \alpha_1^2\bar{Q}_{11}, \quad L_1 \stackrel{\triangle}{=} L(t_1, t_1, \cdot) = \alpha_1^2 Q_1.$$

Выбор наилучшего субоптимального регулятора (2.7) подчиним задаче минимизации меры I-невязки (4.5) в $t = t_0$ вероятностного типа [3, 5] при условиях (3.17), (3.25), (3.26). В виде меры I-невязки субоптимальности, минимизируемой на параметрах $\bar{A}$, G_1, $\hat{\Psi}$, $\tilde{N}$, $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}_2$, трактуемых как управления, возьмем симметрические полиномы от собственных чисел матрицы (4.5) в $t = t_0$, в частности, $I_1 = \mathrm{tr}\, L(t_0, \cdot)$, $I_n = \det L(t_0, \cdot)$. Используя матричные множители Лагранжа системы (1.2), (2.8), (4.5) с учетом условий сепарации, на основе анализа первой вариации I получим аналитический вид необходимых условий выбора наилучших матриц $\bar{A}^0$, $G_1{}^0(V^0 = V_{\mathrm{opt}})$ аналогично процедурам [3–5, 7]. В практическом поиске I-оптимальных V^0 предпочтительнее численные методы (напр., метод градиентов) [4, 6]. В ряде случаев (напр., при ортогональных преобразованиях T в (2.1), либо при инвариантных по T мерах I) объем вычислений сокращается в переменных x, y, $\bar{L}$ в силу блочного вида (4.1) и разделения системы (2.16).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aoki, M.* Joint Automat. Contr. Conf. Preprints Papers, New York, 178—183 (1967).
2. *Aoki, M.* IEEE Trans. Automat. Contr., **13**, 246—248 (1968).
3. *Kleinman, D. L., Athans, M.* IEEE Trans. Automat. Contr., **13**, 150—153 (1968).
4. *Ульм С.* Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., **19**, № 2, 150—151 (1970).
5. *Ульм С.* Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., **20**, № 1, 3—7 (1971).
6. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. М., «Наука», 1980.
7. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления. М., «Наука», 1966.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
23/IX 1983

I. KEIS

LINEAARNE MITTESTATSIONAARNE AGREGEERIMISMEETOD SUBOPTIMAALSETE JUHTIMISTE SÜNTEESIMISEKS

On vaadeldud ruutkriteeriumiga lineaarse mitmemõõtmelise dünaamilise seotud tingimustega (1.7), (2.15) süsteemi (1.1), (1.2) mittestatsionaarset z-agregeerimist koordinaatide järgi (1.5), (2.1), mis võimaldab üldistada Aoki-Athans'i konstantset agregeerimismaatriksit kasutava meetodi. On leitud Liouville'i valemi üldistuseks modifikatsioon (1.18) ning saadud ülesande suboptimaalsed regulaatorid (2.7) ja hinnangud (2.21) z-normi määramiseks reguleerimisajavahemikus.

I. KEIS

ON THE LINEAR UNSTATIONARY AGGREGATION IN THE SUBOPTIMAL CONTROL SYNTHESIS

The paper deals with the control problem of the linear multidimensional ($n \gg 2$) dynamical system (1.2) governed by the quadratic performance criterion of quality. The aggregation viewpoint, aiming to diminish the computational procedures volume, is taken into account.

A new approach is introduced on the basis of unstationary linear transform (1.5), (2.1), defined by time-dependent aggregation matrixes, instead of the constant ones in Aoki-Athans way. The principal scheme includes three following stages.

1. The introduction of the z-aggregative component (1.5) composed of informative variables (1.3) and its y-complementing component (2.1), satisfying separation condition (1.7), (2.15), respectively. Here the modification (1.18) of Liouville formula is obtained.
2. The aggregation in performance index (2.4) relevant for orthogonality condition (2.2), is provided in (2.6).
3. The optimal aggregation matrix choice for the prescribed criterion under exact conditions (3.6) or their simplified form (3.17), (3.25), (3.26), is investigated.

As a result, suboptimal control policy is derived in (2.7), and the evaluations (2.21) for z-norm during the time of regulation are obtained.