EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1985, 34, 2

УДК 519.2.24

В. ОЛЬМАН, А. ШМУНДАК

МИНИМАКСНОЕ БАЙЕСОВСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СРЕДНЕГО НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА ДЛЯ КЛАССА ОДНОВЕРШИННЫХ АПРИОРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

(Представил Н. Алумяэ)

Рассмотрим задачу байесовского оценивания случайного параметра θ нормальной плотности $1/\sqrt{2\pi}\exp[-(x-\theta)^2/2]$ по наблюдению x, независимому от θ. Относительно распределения F параметра θ известно, что $F\in\mathcal{F}(a)$ [1], т. е. для заданного $a>0$

1) $F(t)+F(-t+0)=1,\quad t>0,$
2) $F(a)=1,$
3) $F(t)$ вогнута при $t>0$.

Подобная постановка рассматривалась в [1–4], причем в [3, 4] были заданы ограничения на моменты априорного распределения, а в [1, 2], как и в настоящей статье, на его форму.

Определим качество оценки $\delta(x)$ в виде

$$r(\delta)=\sup_{F\in\mathcal{F}(a)} R(\delta, F),$$

где $R(\delta, F)=\int\limits_{-a}^{a} E_\theta(\delta(x)-\theta)^2\,dF(\theta)$.

$\mathcal{F}(a)$-минимаксной байесовской оценкой назовем δ_0 такую, что

$$\inf_\delta r(\delta)=r(\delta_0).$$

В статье исследуется проблема построения $\mathcal{F}(a)$-минимаксной байесовской оценки и дана граница снизу для минимаксного риска $r(\delta_0)$.

Обозначим через $\{P_t\}$, $a\geqslant t\geqslant 0$, семейство априорных распределений из $\mathcal{F}(a)$, определенных следующим образом:

$$P_0(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ 1, & x>0\end{cases},\qquad P_t(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant -t\\ \dfrac{t+x}{2t}, & -t<x\leqslant t.\\ 1; & x>t\end{cases}$$

Лемма 1. *Для того, чтобы распределение F принадлежало $\mathcal{F}(a)$, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое вероятностное распределение μ, сосредоточенное на $[0, a]$, что*

$$\int\limits_{-a}^{a} u(\theta)\,dF(\theta)=\int\limits_0^a\int\limits_{-a}^{a} u(\theta)\,dP_t(\theta)\,d\mu(t) \tag{1}$$

для любой непрерывной функции $u(\theta)$.

Доказательство. Достаточность очевидна в силу линейности интеграла и того, что $P_t \in \mathfrak{F}(a)$, $0 \leqslant t \leqslant a$. Для доказательства необходимости заметим, что если $F \in \mathfrak{F}(a)$, то существует неотрицательная функция $f(x)$ со свойствами:

1) $f(x) = f(-x)$, $0 \leqslant x \leqslant a$,

2) $f(x)$ непрерывна справа и не возрастает при $0 < x \leqslant a$,

3) $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt + dF(0)$, $0 < x \leqslant a$.

Определим меру $\mu(t)$ так, что

$$d\mu(0) = dF(0), \quad d\mu(t) = -2t\,df(t), \quad 0 < t < a, \quad d\mu(a) = 2af(a-0).$$

Покажем, что определенная так мера является вероятностным распределением, т. е. $\int_0^a d\mu(t) = 1$. Имеем

$$\int_0^a d\mu(t) = dF(0) + 2af(a-0) - \int_{+0}^{a-0} 2t\,df(t)$$

и, интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^a d\mu(t) = dF(0) - 2[af(a-0) - \lim_{t\to 0} tf(t)] + 2af(a-0) + 2\int_{+0}^{a-0} dF(t).$$

Из непрерывности справа функции $f(t)$ следует существование $\lim\limits_{t\to 0} tf(t)$. Пусть $\lim\limits_{t\to 0} tf(t) = c > 0$. Тогда для $0 < \varepsilon < c$ существует такое δ, что $tf(t) > c - \varepsilon$ при $0 < t < \delta$, и следовательно,

$$\int_0^\delta f(t)\,dt > (c-\varepsilon)\int_0^\delta \frac{1}{t}\,dt = \infty,$$

что противоречит тому, что $\int_0^\delta f(t)\,dt = F(\delta) - F(+0) < \infty$. В силу симметричности распределения F

$$2\int_{+0}^{a-0} dF(t) = \int_{-a+0}^{a-0} dF(t) - dF(0),$$

что и доказывает утверждение $\int_0^a d\mu(t) = 1$.

Теперь докажем, что для выбранной меры $d\mu(t)$ имеет место равенство (1). Преобразуем правую часть (1) к виду

$$dF(0)u(0) + \int_{+0}^{a-0}\int_{-t}^{t} u(\theta)\,d\theta\,(-df(t)) + f(a-0)\int_{-a}^{a} u(\theta)\,d\theta$$

и, интегрируя по частям, получаем

$$dF(0)u(0) + \left[-f(t)\int_{-t}^{t} u(\theta)\,d\theta\Big|_{+0}^{a-0}\right] + \int_{+0}^{a-0} f(t)[u(t) + u(-t)]\,dt +$$
$$+ f(a-0)\int_{-a}^{a} u(\theta)\,d\theta.$$

Существование $\lim\limits_{t\to +0} f(t)\int_{-t}^{t} u(\theta)\,d\theta$ следует из правосторонней непрерывности функции $f(t)$. Очевидно,

$$|f(t)\int_{-t}^{t}u(\theta)\,d\theta|\leqslant 2tf(t)c_1(t),\quad c_1(t)=\max_{-t\leqslant\theta\leqslant t}|u(\theta)|\leqslant c_1(a),$$

а как доказано ранее, $\lim\limits_{t\to+0} tf(t)=0$, и следовательно, $\lim\limits_{t\to+0} f(t)\int_{-t}^{t}u(\theta)\,d\theta=$ $=0$. Таким образом, правая часть (1) преобразована к виду

$$dF(0)u(0)+\int_{+0}^{a-0}f(t)[u(t)+u(-t)]\,dt,$$

что совпадает с левой частью равенства (1), а следовательно, лемма доказана.

Введем обозначение $r(\delta,t)=R(\delta;P_t)$, $0\leqslant t\leqslant a$. Тогда в силу леммы 1 существует соответствие между элементами множества $\mathcal{F}(a)$ и пространством U_a всех вероятностных мер на $[0, a]$ такое, что

$$R(\delta,F)=\int_0^a r(\delta,t)\,d\mu(t);\tag{2}$$

и таким образом, исходная задача сводится к традиционной минимаксной [5] с новой функцией риска $r(\delta,t)$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant a} r(\delta,t)\longrightarrow\inf_{\delta}.$$

Нетрудно проверить, что для функции риска $r(\delta, t)$ и пространства параметра t допущения 5.1—5.6, сформулированные А. Вальдом [5], выполнены, а следовательно, имеют место следующие предложения.

П р е д л о ж е н и е 1. Справедливо равенство

$$\inf_{\delta}\sup_{F\in\mathcal{F}(a)} R(\delta,F)=\sup_{F\in\mathcal{F}(a)}\inf_{\delta} R(\delta,F).\tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу выпуклости $r(\delta, t)$ по δ очевидно равенство

$$\inf_{\delta}\sup_{\mu\in U_a}\int_0^a r(\delta,t)\,d\mu(t)=\sup_{\mu\in U_a}\inf_{\delta}\int_0^a r(\delta,t)\,d\mu(t),$$

так как μ является произвольной смешанной стратегией выбора параметра t, а используя (2), получаем (3).

О п р е д е л е н и е. Процедура δ называется $\mathcal{F}(a)$-допустимой по отношению к $R(\delta,F)$, если не существует процедуры равномерно лучшей, т. е. не существует δ_1 такой, что $R(\delta,F)\geqslant R(\delta_1,F)\ \forall F\in\mathcal{F}(a)$, и хотя бы для одного $F\in\mathcal{F}(a)$ $R(\delta,F)>R(\delta_1,F)$.

П р е д л о ж е н и е 2. Множество $\mathcal{F}(a)$-допустимых процедур совпадает с классом B_a — классом байесовских оценок θ относительно априорных распределний из $\mathcal{F}(a)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если δ — байесовская оценка, то она $\mathcal{F}(a)$-допустима, так как для любого распределения $F\in\mathcal{F}(a)$ существует единственная байесовская оценка. Пусть теперь δ_1 — $\mathcal{F}(a)$-допустимая оценка, но не байесовская по отношению к какому-либо распределению из $\mathcal{F}(a)$, т. е.

$$\inf_{\delta} R(\delta,F)<R(\delta_1;F)\quad\forall F\in\mathcal{F}(a),$$

что эквивалентно неравенству

$$\inf_{\delta}\int_0^a r(\delta,t)\,d\mu(t)<\int_0^a r(\delta_1,t)\,d\mu(t).$$

Но в силу теорем А. Вальда [5] класс байесовских процедур по отношению к $r(\delta, t)$ совпадает с классом допустимых процедур, и следовательно, δ_1 не является допустимой по отношению к $r(\delta, t)$. Таким образом, существует оценка δ_2 такая, что

$$r(\delta_2, t) \leqslant r(\delta_1, t), \quad 0 \leqslant t \leqslant a,$$

а интегрируя последнее неравенство по мерам $\mu \in U_a$, получаем противоречие с предположением $\mathcal{F}(a)$-допустимости оценки δ_0.

Предложение 3. $\mathcal{F}(a)$-минимаксная оценка является байесовской по отношению к $F_0(x)$ — конечной линейной комбинации распределений $P_t(x)$, $0 \leqslant t \leqslant a$, т. е.

$$F_0(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{t_i}(x), \ n \geqslant 1, \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \ \lambda_i \geqslant 0; \ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Доказательство. Очевидно, что для любой байесовской оценки δ_μ относительно $\mu \in U_a$ $r(\delta_\mu, t)$ — аналитическая по t функция. Таким образом, она либо имеет конечное число максимумов на интервале $[0, a]$, либо постоянна. Но если $r(\delta_\mu, t)$ не зависит от t, то $R(\delta_\mu, \theta)$ также постоянна по $\theta \in [-a, a]$, а в силу аналитичности и на $(-\infty, \infty)$. Легко показать, что в этом случае $\delta_\mu(x) = x$, так как это единственная допустимая на $(-\infty, \infty)$ оценка, имеющая постоянный риск [6]. Но x не является допустимой оценкой на $[-a, a]$, а следовательно, $r(\delta_\mu, t)$ имеет лишь конечное число максимумов на интервале $[0, a]$. Как известно [5], наименее благоприятное по отношению к $r(\delta, t)$ распределение μ_0 сосредоточено в точках, соответствующих наибольшему значению функции $r(\delta_{\mu_0}, t)$, и следовательно, существует $n \geqslant 1$ такое, что

$$F_0(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{t_i}(x), \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geqslant 0,$$

причем

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant a} r(\delta_{\mu_0}, t) = r(\delta_{\mu_0}, t_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

что и доказывает предложение 3.

Лемма 2. *Для достаточно малых a байесовская оценка δ_a, соответствующая равномерному на $[-a, a]$ распределению, является $\mathcal{F}(a)$-минимаксной.*

Доказательство. Все оценки из класса B_a дифференцируемы и суммируемы с квадратом, следовательно,

$$\frac{d}{d\theta} E_\theta(\delta(x) - \theta)^2 = 2E_0\{[\delta(x+\theta) - \theta]\,[\delta'(x+\theta) - 1]\}, \quad \delta \in B_a,$$

причем

$$2E_0[\delta(x+\theta)\delta'(x+\theta)] = E_0\left(\frac{d}{d\theta}\delta^2(x+\theta)\right) = E_0(x\delta^2(x+\theta)).$$

Пусть $\delta_a(x)$ — байесовская оценка по отношению к равномерному $[-a, a]$ априорному распределению. Тогда $\delta_a(x)$ нечетная функция и при $\theta > 0$

$$E_0(x\delta^2(x+\theta)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x(\delta^2(x+\theta) - \delta^2(x-\theta)) \exp(-x^2/2)\, dx > 0,$$

так как $\delta_a(x)$ — возрастающая по x функция. Далее, очевидно, что

$$E_0(\delta(x+\theta)+\theta\delta'(x+\theta))=2\theta E_0\delta'(x)+O(\theta^3),$$

и в свою очередь $E_0\delta'(x)=E_0x\delta(x)$. Таким образом, имеем

$$\frac{d}{d\theta}E_\theta(\delta_a(x)-\theta)^2=E_0(x\delta_a^2(x+\theta))+2\theta[1-E_0(x\delta_a(x))]+O(\theta^3), \quad (4)$$

а так как $|\delta_a(x)|\leqslant a$, то $|E_0x\delta_a(x)|\leqslant\sqrt{\frac{2}{\pi}}a$, и следовательно, при достаточно малых a выражение (4) положительно, т. е. $E_\theta(\delta_a(x)-\theta)^2$ возрастает при $0\leqslant\theta\leqslant a$. Теперь, используя лемму 3 из [2], имеем

$$\sup_{F\in\mathcal{F}(a)}\int_{-a}^{a}E_\theta(\delta_a(x)-\theta)^2\,dF(\theta)=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}E_\theta(\delta_a(x)-\theta)^2d\theta,$$

что с учетом леммы 2 из [2] завершает доказательство леммы.

Замечание. Численные результаты показали, что монотонность функции $E_\theta(\delta_a(x)-\theta)^2$ на интервале $[0,a]$ имеет место при $a\leqslant 1/2$.

В заключение приведем оценку снизу для минимаксного риска $\inf\limits_{\delta} r(\delta)$.

Теорема. *Имеет место неравенство*

$$\inf_\delta r(\delta)>r(\delta_a,a).$$

Доказательство. Выпишем последовательность очевидных соотношений:

$$\inf_\delta r(\delta)=\inf_\delta\sup_{\mu\in U_a}\int_0^a r(\delta,t)\,d\mu(t)=$$

$$=\inf_\delta\sup_{0\leqslant t\leqslant a}r(\delta,t)\geqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant a}\inf_\delta r(\delta,t)=\sup_{0\leqslant t\leqslant a}r(\delta_t,t),$$

где δ_t — байесовская оценка параметра θ относительно равномерного на $[-t,t]$ распределения. Рассмотрим функцию $r_1(s,t)=$ $=r(\delta_s,t)=\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}R(\delta_s,\theta)\,d\theta$.

Имеем

$$\frac{d}{dt}r(\delta_t,t)=\frac{\partial r_1(s,t)}{\partial s}\bigg|_{s=t}+\frac{\partial r_1(s,t)}{\partial t}\bigg|_{s=t}.$$

Но $\frac{\partial r_1(s,t)}{\partial s}\Big|_{s=t}=0$, так как $r_1(s,t)$ достигает экстремума при $s=t$, т. е. на байесовской оценке. Кроме того,

$$\frac{\partial r_1(s,t)}{\partial t}\bigg|_{s=t}=\frac{1}{t}\left[R(\delta_t,t)-\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}R(\delta_t,\theta)\,d\theta\right]>0,$$

что следует из леммы 6 в [1], таким образом, $\frac{d}{dt}r(\delta_t,t)>0$; а следовательно,

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant a}r(\delta_t,t)=r(\delta_a,a),$$

что и доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шмундак А., Ольман В.* Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., **34**, № 1, 20—25 (1985).
2. *Ольман В.* Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., **33**, № 3, 285—290 (1984).
3. *Skibinsky, M.* Ann. Math. Statist., **39**, № 2, 492—501 (1968).
4. *Skibinsky, M.* SIAM J. Appl. Math., **16**, 134—145 (1968).
5. *Вальд А.* Статистические решающие функции. В кн.: Позиционные игры. М., «Наука», 1967.
6. *Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р.* Характеризационные задачи математической статистики. М., «Наука», 1972.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
12/XII 1983

V. OLMAN, A. SMUNDAK

NORMAALJAOTUSE KESKVÄÄRTUSE BAYESI MINIMAKSHINNANG UNIMODAALSETE APRIOORSETE JAOTUSTE KLASSILE

On vaadeldud normaaljaotuse nihkeparameetri θ minimakshinnangut tingimusel, et parameetri aprioorne jaotus kuulub sümmeetriliste unimodaalsete ja lõplikul intervallil $[-a, a]$ jaotatud jaotuste klassi $\mathcal{F}(a)$, s. t. on vaadeldud $\sup\limits_{F\in\mathcal{F}(a)} r(\delta, F)$ minimeerimist, kus $r(\delta, F) = \int\limits_{-a}^{a} E_\theta(\delta(x)-\theta)^2\, dF(\theta)$, $x \sim N(\theta, 1)$. On näidatud, et väikeste a väärtuste korral lahendab ülesande Bayesi hinnang δ_a, mis vastab aprioorsele ühtlasele jaotusele vahemikus $[-a, a]$, ning tõestatud, et riskifunktsiooni $r(\delta, F)$ suhtes lubatavate protseduuride klass ühtib Bayesi hinnangute alamklassiga, mis vastab $\mathcal{F}(a)$ elementidele. Suvalise $a>0$ jaoks on leitud alumine minimakshinnang.

V. OLMAN, A. SHMUNDAK

MINIMAX BAYES ESTIMATION OF MEAN OF NORMAL LAW FOR THE CLASS OF UNIMODAL A PRIORI DISTRIBUTIONS

The problem of Bayes estimation of the mean value θ of normal distribution is considered. It is assumed that the a priori distribution $F(\theta) \in \mathcal{F}(a)$, i. e. $F(\theta)$ is 1) symmetrical, 2) concentrated on the interval $[-a, a]$ where a is a fixed positive, 3) convex on $[-a, 0]$. The problem is to minimize $\sup\limits_{F\in\mathcal{F}(a)} r(\delta, F)$, where $r(\delta, F) = \int\limits_{-a}^{a} E_\theta(\delta(x)-\theta)^2\, dF(\theta)$, $x \sim N(\theta, 1)$. It is shown that for any sufficiently small $a>0$ the Bayes estimator δ_a corresponding to the uniform distribution on $[-a, a]$ provides a solution of this problem. It is proved that the class of procedures admissible with respect to the risk function $r(\delta, F)$, coincides with the set of all Bayes estimators corresponding to distributions from $\mathcal{F}(a)$. The lower bound for minimax risk for any $a>0$ is given.