EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA. MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА. МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS. MATHEMATICS
1984, 33, 2

УДК 519.3 : 51 : 62—50

И. КЕЙС

СПОСОБ ЛИНЕЙНОГО АГРЕГИРОВАНИЯ В СУБОПТИМАЛЬНОМ СИНТЕЗЕ УПРАВЛЕНИЙ

(Представил Н. Алумяэ)

Рассмотрено линейное агрегирование по координатам и управлениям многомерной динамической системы с квадратичным критерием качества, обобщающее конструкцию [1–4]. Получены субоптимальные регуляторы задачи и необходимые условия для выбора наилучших по объемному вероятностному показателю оптимальности постоянных параметров агрегирования типа [2,4]. Приведены условия на матрицы агрегирования C, K, $\bar{K}$ при точной и приближенной декомпозиции по части переменных исходной модели.

В задаче оптимального по критерию f синтеза управлений $u(t,x)$ исходной системы S_1

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u,\quad 2f=x'_1P_1x_1+\int_{t_0}^{t_1}[x'Q(t)x+u'R(t)u]\,dt, \tag{1}$$

$$x=(x_1,\ldots,x_n)',\quad u=(u_1,\ldots,u_r)';\quad A,B,Q,R\subset C[t_0,t_1],$$

$$A=(n\times n),\ B=(n\times r),\ P=(n\times n)\geqslant 0,\ Q=(n\times n)\geqslant 0,\ R=(r\times r)\gg 0,$$

$$x_1=x(t_1),\quad P_1=P(t_1),\quad x'=x^T,\quad \dot{x}=dx/dt$$

известны ее оптимум $f_0=f_0(t_0,x_0)=f(t_0,x_0|u_0)$ $(x_0=x(t_0))$ и линейный по x оптимальный регулятор $u_0(t,x)$ вида

$$2f_0=x'_0M(t_0)x_0,\quad u_0=N(t)x,\quad N=-R^{-1}B'M,\quad M(t)=(n\times n), \tag{2}$$

где $\dot{M}=MBR^{-1}B'M-A'M-MA-Q$, $M(t_1)=P_1=P(t_1)$,

если $M(t)$ определена и ограничена на $[t_0,t_1]$. Аналогичному условию на $[t_0,t_1]$ удовлетворяет матрицант $\bar{M}(t)=(l\times l)$, $l\leqslant n$, $l\ll n$. Величины t_0, t_1, $x_0=x[t_0]$, $\bar{y}_0=\bar{y}[t_0]$ — произвольные фиксированные постоянные. Проведем агрегирование задачи (1) в целях уменьшения ее размерности, требований к объему памяти вычислений на ЭВМ, учитывая возможные ограничения по числу каналов управления и условие неполноты информации по x — измеримости лишь y-компоненты x, где $y=Cx$, $\dim y=l\ll n$, $C=(l\times n)$ — постоянная матрица. Обобщая [1,4], введем линейную агрегацию модели (1) системы S_1 объектом системы S_2 размерности $l=\dim\bar{y}=\dim y\ll n$ и вида

$$\dot{\bar{y}}=\bar{A}\bar{y}+\bar{B}v,\quad \bar{A}=CAK=(l\times l),\quad \bar{B}=CBU=(l\times m), \tag{3}$$

$$r_C=r_K=l\ll n;\quad u=Uv,\quad r_U=m,\quad v=(v_1,\ldots,v_m)',$$

$$r_F\stackrel{\Delta}{=}\operatorname{rang}F,\quad \dim\bar{y}=l,\quad \dim v=m\leqslant r,$$

где $C=(l\times n)$, $K=(n\times l)$, $U=(r\times m)$ — произвольные постоянные матрицы ранга l,m соответственно (3). Агрегацию по f в (1) зададим у S_2 критерием оптимальности

$$2\bar f=\bar y_1\bar P_1 y_1+\int_{t_0}^{t_1}[\bar y'\bar Q(t)\bar y+v'\bar R(t)v]\,dt\to\min_v, \tag{4}$$

$$\bar P_1=\bar P(t_1)=S'P_1S=(l\times l)\geqslant 0,\quad \bar Q=S'QS=(l\times l)\geqslant 0;$$

$$\bar R=U'RU=(m\times m)\gg 0,\quad r_S=l\ll n,\quad S=(n\times l)=\text{const}.$$

При матрице $T=(n\times n)=\text{const}$, удовлетворяющей условию $T'T=P_1$, получим, что неравенство $|\bar P_1|\overset{\Delta}{=}\det\bar P_1\neq 0$ выполнено лишь в случае

$$r_{TS}=l. \tag{5}$$

Аналогично (1) и (2), оптимальные функции $\bar f_0$ и v_0 системы (3) и (4) имеют вид

$$2\bar f_0=\bar y'_0\bar M(t_0)\bar y_0,\quad \bar M(t)=(l\times l);\quad v_0=\bar N\bar y,\quad \bar N=-\bar R^{-1}\bar B'\bar M=(m+l), \tag{6}$$

где с учетом (1)—(4) матрицант $\bar M(t,c)$ — $(l\times l)$-мерное решение задачи Коши

$$\bar M^{\cdot}=\bar M\bar B\bar R^{-1}\bar B'\bar M-\bar A'\bar M-\bar M\bar A-\bar Q,\quad \bar M[t_1|\cdot]=\bar M[t]\,|_{t=t_1}=\bar P(t_1)=\bar P_1.$$

Замкнем (1) ее субоптимальным в силу (3), (4) и (6) регулятором

$$u_*=Uv_0|_{\bar y\to y}=U\bar NCx,$$

полученным из (3) и (6) заменой $\bar y$ на $y=Cx$.

Ниже существенную роль имеет x_0-квадратичный вид субоптимума f_* — значение f на субоптимальном регуляторе u_* согласно равенствам

$$f_*=f_*(t_0,x_0,c)=f(\cdot\,|u_*)=1/2x'_0L(t_0,c)x_0, \tag{7}$$

где матрицант $L(t,c)$ — решение соответствующего линейного уравнения

$$-L^{\cdot}=D'L+LD+\tilde Q,\quad L(t_1,c)=P_1\quad (L'=L),$$

$$D=A+BU\bar NC,\quad \tilde Q=Q+C'\bar N'U'RU\bar NC,$$

c — вектор агрегации, отвечающий матрицам C, K, U, $S\,(\dim c=n_0$, $n_0=3l\cdot n+rm)$. Из субоптимальности относительно (1) и (2) следует неотрицательность матрицы $L—M$, т. е. $L\geqslant M$. Тогда эллиптическая область $f_*(x_0,\cdot)\leqslant\varrho^2$ лежит в $f(x_0,t_0)\leqslant\varrho^2$ при $\forall t_0,\varrho,c=\text{const}$. Возьмем поэтому меру максимизации по c в виде максимума объема ω_*-области $\Omega_*=\{x_0|2f_*(x_0,\cdot)\leqslant 1\}$ среднегеометрического и вероятностного типа [2, 4]. Обозначив $\gamma(p)$-гамма функцию $p>0$, из (1)—(4), (6), (7), получим

$$\omega_*=\pi^{n/2}\gamma^{-1}(1+n/2)(\lambda_1\ldots\lambda_n)^{-1},\quad \lambda_1^2\ldots\lambda_n^2=|L(t_0,\cdot)|;\ \lambda\colon|L-\lambda^2 1_n^n|=0,$$

$$\tilde I(c,t_0)\overset{\Delta}{=}|L(t_0,c)|,\quad L(t,t_1,c)=\Phi'^{-1}(t|\cdot)V(t|\cdot)\Phi^{-1}(t|\cdot);\quad |W|\overset{\Delta}{=}\det W, \tag{8}$$

$$V^{\cdot}=-\Phi'\tilde Q\Phi,\quad V(t_1|\cdot)=P_1=L(t_1|\cdot),\quad \tilde I(c,t)=|V(t|\cdot)|\,|\Phi(t|\cdot)|^2,$$

$$V=P_1+\int_t^{t_1}\Phi'(\tau|\cdot)\tilde Q(\tau|\cdot)\Phi(\tau|\cdot)\,d\tau,\quad \tilde I(t_1|\cdot)=|V(t_1,t_1,c)|=|P_1|,$$

$$[\ln(\tilde I/|V|)]^{\cdot}=-2trD(t,c);\quad trW\overset{\Delta}{=}\sum_{i=1}^n w_{ii},\quad W=[w_{ij}]\quad (i,j=\overline{1,m}),$$

где λ^2 — собственные числа $L(t,t_1,c)$, а $\Phi(t,t_1,c)$ — переходная матрица

$$\Phi^{\cdot}=D\Phi,\quad \Phi(t_1,t_1,\cdot)=\mathbf{1}_n^n,\quad \Phi(t,t_2,\cdot)=\Phi(t,t_1,\cdot)\Phi(t_1,t_2,\cdot).$$

Ввиду (8) задача $\max\limits_c \omega_*$ эквивалентна c-минимизации функционала

$$\bar{I}(t_0,t_1,c)=|V(t_0,\cdot)|\exp\left[2\int_{t_0}^{t_1} trD(\tau,\cdot)\,d\tau\right]\to\min_c \tag{9}$$

при $\quad V^{\cdot}=-\Phi'\bar{Q}\Phi,\quad V|_{t=t_1}=P(t_1);\quad \Phi^{\cdot}=D\Phi,\quad \Phi(t_1,t_1,\cdot)=\mathbf{1}_n^n.$

Вводя матрицант $\wedge=\Phi'\bar{Q}\Phi\theta$ из (8) и (9), найдем

$$V^{\cdot}=-\wedge V,\quad \bar{I}(t,\cdot)=|L(t,\cdot)|=P_1\exp\left[\int_t^{t_1} tr(\wedge+2D)\,d\tau\right]. \tag{10}$$

Из (9), (10) и монотонности экспоненты условие $\min\limits_c \bar{I}$ эквивалентно минимизации по c интеграла

$$I=\int_{t_0}^{t_1} tr(\wedge+2D)\,d\tau,\quad D=A-BU\bar{R}^{-1}\bar{B}'\bar{M}C,\quad \wedge=\Phi'\bar{Q}\Phi\theta, \tag{11}$$

где $\qquad \theta=V^{-1},\quad \theta^{\cdot}=\theta\Phi'\bar{Q}\Phi\theta,\quad \theta(t_1,t_1,c)=P_1^{-1}=(n\times n), \qquad (12)$

$$\bar{N}=-\bar{R}^{-1}\bar{B}'\bar{M},\quad \bar{Q}=Q+C'\bar{N}'U'RU\bar{N}C,\quad \Phi^{\cdot}=D\Phi,\quad \Phi(t_1,t_1,\cdot)=\mathbf{1}_n^n,$$

$$\bar{M}^{\cdot}=\bar{M}\bar{B}\bar{R}^{-1}\bar{B}'\bar{M}-\bar{A}'\bar{M}-\bar{M}\bar{A}-\bar{Q},\quad \bar{M}(t_1,t_1,\cdot)=\bar{P}_1(\bar{M}=\bar{M}').$$

Обозначая вектор, отвечающий $\dot{\Phi}$, $\bar{M}$, θ, через z, из (12) находим вид $X(t,z,c)=z^{\cdot}$ и значения $z_1=z(t_1|\cdot)$ в $t=t_1$. Исходная задача c-минимизации (9) преобразована в новых обозначениях к задаче $\min\limits_c I$, заданного (11), при связях (12), записанных в векторной форме $z^{\cdot}=X$. Вводя векторы ψ,φ, сопряженные с z,c, составим ее гамильтониан и каноническую систему

$$z^{\cdot}=H_\psi,\quad z[t_1,\cdot]=z_1;\quad \psi^{\cdot}=-H_z,\quad \psi[t_0,\cdot]=0,\quad \dim c=n_0, \tag{13}$$

$$c^{\cdot}=H_\varphi=0,\quad c=c_0,\quad \varphi^{\cdot}=-H_c,\quad \varphi[t_0,\cdot]=\varphi[t_1,\cdot]=\int_{t_1}^{t_0} H_c\,dt=0,$$

$$H=\psi_0X_0(t,z,c)+\psi\cdot X(t,z,c)+\varphi\cdot 0\ (\psi_0=-1,\ X_0=tr(\wedge+2D)),$$

$$\dim z=\dim\psi=s_0=l^2+2n^2,\quad F_x\overset{\triangle}{=}\nabla_xF=\mathrm{grad}_xF=\partial F/\partial x.$$

Если $c=c_0$, $z^0=z(\cdot,c_0)$ минимизируют (11), то должна существовать ненулевая непрерывная функция $p[t]=(\psi_0,\psi',\varphi')'$, удовлетворяющая уравнениям (13) и условиям [5] вида

$$\psi[t_0,\cdot]=0,\quad \varphi[t_0,\cdot]=0,\quad \varphi[t_1,\cdot]=\int_{t_1}^{t_0}(H_c)\,dt=0.$$

Если c лежит в замкнутой области $\bar{C}$ с кусочно-гладкой границей, то последние условия оптимальности по c принимают вид [5]

$$\int_{t_0}^{t_1}(\psi_s\partial X_s/\partial\nu)\,dt\leqslant 0\quad (s=0,1,\ldots,s_0), \tag{14}$$

где ν — любое внутреннее направление в $\bar{C}$ из c_0.

При $K=C'$, $S=C'$, $U=\mathbf{1}_r^r$ в случае критерия $I_0(c,t_0)\overset{\triangle}{=}trL(t_0,c)$, аналогично (13) и (14), находим необходимые условия стационарности I_0 по C [4]. В поиске I-оптимальных матриц C, K, S, U эффективны численное решение (13), (14) или метод градиентов [2, 3]. В отличие от агрегации (3) модели (1) с произвольной K рассмотрим случай, когда существует точная y-декомпозиция (1) в смысле $y \equiv \bar{y}$, $y^{\cdot} = \bar{A}y + CBUv$, представляющая самостоятельный интерес для линейных многомерных объектов (1). При заданных A, C это требование эквивалентно матричному уравнению на $\bar{A} = \bar{A}(A, C) = (l \times l)$ следующего вида

$$\bar{A}C = CA\,(D \stackrel{\Delta}{=} CA = (l \times n),\ D = [D_1, D_2],\ D_1 = (l \times l),\ D_2 = (l \times (n-l))). \quad (15)$$

Из условия $r_c = l$ перенумерацией переменных x получаем

$$\Delta C_1 \neq 0 \sim \operatorname{rang} C_1 = l, \quad C = [C_1, C_2], \quad (16)$$

$$C_1 = (l \times l), \quad C_2 = (l \times (n-l)), \quad \Delta W \stackrel{\Delta}{=} \det W.$$

С учетом (16) уравнение (15) имеет единственное решение

$$\bar{A} = CA_1 C_1^{-1} = C_1 M C_1^{-1} \quad (M = A_1^{(1)} + C_1^{-1} C_2 A_1^{(2)}), \quad (17)$$

если
$$CA_2 = CA_1 C_1^{-1} C_2 \sim A_2^1 = MC_1^{-1}C_2 - C_1^{-1}C_2 A_2^{(2)}, \quad (18)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} A_1^{(1)} & A_2^{(1)} \\ A_1^{(2)} & A_2^{(2)} \end{bmatrix}, \quad A_1^{(1)} = (l \times l); \quad A_2^{(1)} = (l \times (n-l)),$$

$$A_1^{(2)} = ((n-l) \times l), \quad A_2^{(2)} = ((n-l) \times (n-l)).$$

Отметим, что матрица $\bar{A}$ подобна матрице M, а их спектры совпадают. Вводя матрицу $Z \stackrel{\Delta}{=} C_1^{-1}C_2 = (l \times (n-l))$, получим $(l \times (n-l))$ необходимых и достаточных условий (18) существования решения (15) в форме матричного уравнения Риккати на Z вида

$$ZA_1^{(2)}Z + A_1^{(2)}Z - ZA_2^{(2)} - A_2^{(1)} = 0_{l,\,n-l}.$$

Ниже ограничимся наихудшим случаем максимальной обусловленности $\bar{A}$, когда на $[t_0, t_1]$ имеем $r_D = l$, что эквивалентно $\Delta D_1 \neq 0$ при надлежащей смене индексов в x_i. В обозначениях

$$A = [A_1, A_2], \quad A_1 = (n \times l), \quad A_2 = (n \times (n-l)), \quad \bar{A} = D\bar{K}, \quad (19)$$

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} \bar{K}_1 \\ \bar{K}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{K}_1 = (l \times l), \quad \bar{K}_2 = ((n-l) \times l)$$

условие (15) в силу (16)—(18) эквивалентно уравнению

$$D(\bar{K}C - 1_n^n) = 0_{l,n} \quad (|D_1| \neq 0 \Rightarrow r_c = l \text{ на } [t_0, t_1]). \quad (20)$$

Учитывая (19), получим множество решений (20) в виде $\bar{K}_1 = C_1^{-1}(1_l^l - C_2\bar{K}_2)$ с произвольным матрицантом $\bar{K}_2(t)$, причем $\bar{A} = D\bar{K}(t)$, а необходимые условия его существования суть

$$|C_1| \neq 0, \quad CA_1C_1^{-1}C_2 = CA_2 \quad \text{на} \quad [t_0, t_1]. \quad (21)$$

Если (21) не выполняются, то вместо K ищем $\bar{K}$ как решение (20) в смысле наименьших квадратов, выбирая ее, например, из условия минимума квадрата нормы Гильберта

$$\min tr[D(\bar{K}C - 1_n^n)(C'\bar{K}' - 1_n^n)D'] \quad (\|V\|^2 = tr(VV'),\ V' \stackrel{\Delta}{=} V^T).$$

В связи с условием (21) отметим, что неавтономные (и автономные) системы (1) уместно агрегировать матрицами C, K, S, U, зависящими от t.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aoki, M.* Joint Automat. Contr. Conf. Preprints Papers, New York, 178—179 (1967).
2. *Kleinman, D. L., Athans, M.* IEEE Trans. Automat. Contr., **13**, 150—153 (1968).
3. *Ульм С.* Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., **19**, № 2, 150—151 (1970).
4. *Ульм С.* Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., **20**, № 1, 3—7 (1971).
5. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления. М., «Наука», 1966, 295—300.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
14/III 1983

I. KEIS

LINEAARNE AGREGEERIMISMEETOD SUBOPTIMAALSETE JUHTIMISTE SÜNTEESIMISEKS

On vaadeldud ruutkriteeriumiga lineaarse mitmemõõtmelise dünaamilise süsteemi (1) lineaarset agregeerimist koordinaatide ja juhtimisparameetrite järgi. See võimaldab üldistada konstruktsiooni (1—4).

On leitud ülesande suboptimaalsed regulaatorid (6), (7) ja vajalikud tingimused konstantsete agregeerimisparameetrite (13), (14) parimaks valikuks optimaalsuse mahulise näitaja (9) järgi.

I. KEIS

ON THE LINEAR AGGREGATION METHOD FOR THE SUBOPTIMAL CONTROL SYNTHESIS

The paper considers the control problem of linear large-scale dynamical system (1) with a quadratic performance criterion. Furthermore, the problem of the optimal choice of the aggregation matrices C, K, U, S (see formulae (3), (4)) for the approximate control synthesis is taken into account. Here the generalized Kleinman's Athans'-type probability criterion (9) governs the optimal choice of the optimal aggregation parameters.

Hence, the relevant necessary conditions on the choice of optimal aggregation matrices are achieved in formulae (13), (14).

As a result, the suboptimal control policy (6), (7) is determined if an aggregation vector is selected that is related to (13), (14).

Under the conjectures (19), (20) the exact decomposition of the initial system (1) is obtained in (21).