EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA. MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА. МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS. MATHEMATICS
1984, 33, 2

УДК 519.854.62

Л. КИВИСТИК

ОБОБЩЕННОЕ ПРАВИЛО ВЫБОРА ПРОИЗВОДЯЩЕЙ СТРОКИ ДЛЯ ПОЛНОСТЬЮ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО АЛГОРИТМА ГОМОРИ

(Представил Н. Алумяэ)

Для полностью целочисленного алгоритма Гомори предлагается новое, более гибкое по сравнению с известными правило выбора производящей строки, которое называется обобщенным правилом. Доказывается конечность алгоритма при использовании обобщенного правила.

1. Постановка задачи и вводные замечания. Рассмотрим задачу полностью целочисленного линейного программирования в стандартной форме: максимизировать функцию

$$x_0 = a_{00} + \sum_{j\in J} a_{0j}(-x_j) \tag{1}$$

при условиях

$$x_i = a_{i0} + \sum_{j\in J} a_{ij}(-x_j) \geqslant 0 \quad (i \in I), \tag{2}$$

$$x_j = -1(-x_j) \geqslant 0 \quad (j \in J), \tag{3}$$

$$x_j \text{ — целое } \quad (j = 0, 1, \ldots, n), \tag{4}$$

где I — множество базисных, а J — небазисных переменных, причем $I \cup J = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Для $j = 0$ и $j \in J$ введем обозначение

$$A_j = (a_{0j}, a_{1j}, \ldots, a_{nj})^{\mathrm{T}},$$

где $a_{kj} = 0$, если $k \in J \setminus \{j\}$, и $a_{jj} = -1$, если $j \in J$.

Матрица $A = (a_{ij}) = (A_j)$ $(j \in \{0\} \cup J)$ обычно называется симплексной таблицей и векторы A_j — ее столбцами.

Предположим, что a_{ij} — целые числа $(i \in \{0\} \cup I;\ j \in \{0\} \cup J)$ и симплексная таблица рассматриваемой задачи находится в l-нормальной форме, т. е. $A_j \succ 0$ при всех $j \in J$. Тогда для решения задачи (1)—(4) применим полностью целочисленный (или третий) алгоритм Гомори [1–3]. Напомним, что в этом алгоритме на каждой итерации выбирается ограничение

$$x_k = a_{k0} + \sum_{j\in J} a_{kj}(-x_j) \geqslant 0 \tag{5}$$

с $a_{k0} < 0$, называемое производящим, и по нему строится новое ограничение, т. н. отсечение

$$x_{n+i} = \left[\frac{a_{k0}}{\lambda}\right] + \sum_{j\in J} \left[\frac{a_{kj}}{\lambda}\right](-x_j) \geqslant 0, \tag{6}$$

которое прибавляется к системе (2)—(3). При этом для сохранения

l-нормальности и целочисленности симплексной таблицы ведущий столбец A_l следует определить из условия

$$A_l = \operatorname{lex}\min_{j:\ a_{kj}<0} A_j \tag{7}$$

и затем число $\lambda > 0$ — по соответствующим правилам [1-3].

После каждой симплексной итерации вид задачи (1)—(4) сохраняется. Поэтому мы можем истолковать элементы a_{ij} и столбцы A_j симплексной таблицы (а также множества I и J) как текущие. Однако для облегчения некоторых рассуждений введем индекс шага итерации и обозначим a_{ij} и A_j после t-й итерации также через a_{ij}^t и A_j^t соответственно.

Как известно [1,2], имеют место лексикографические неравенства

$$A_0^0 \succ A_0^1 \succ \ldots \succ A_0^t \succ A_0^{t+1} \succ \ldots \succeq \bar{X}, \tag{8}$$

где $\bar{X} = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)^{\mathrm{T}}$ — любое расширенное допустимое решение (в предположении, что такое существует).

В качестве производящего ограничения (5) обычно выбирают одно из ограничений (2), т. е. обычно $k \in I$. Но производящим может быть также т. н. замещающее ограничение

$$\sum_{i\in I} a_{i0}y_i + \sum_{j\in J} \Big(\sum_{i\in I} a_{ij}y_i\Big)(-x_j) \geqslant 0, \tag{9}$$

где $y_i \geqslant 0$ $(i \in I)$, т. е. ограничение (5) с $a_{kj} = \sum_{i\in I} a_{ij}y_i$ (при этом считаем, что $k > n$). Р. Е. Гомори [1] рассматривает также замещающие ограничения, которые строятся постепенно как линейные комбинации уже построенного отсечения и некоторого ограничения из системы (2). В настоящей заметке в качестве производящего может выступать любое ограничение типа (5), получаемое как следствие из условий (2)—(4).

Обычно для выбора производящего ограничения или, что то же самое, производящей строки в симплексной таблице A пользуются правилом, заданным Р. Е. Гомори [1]: всегда следует выбирать первую сверху строку $(k \neq 0)$, содержащую отрицательный свободный член a_{k0}. Будем это правило называть о с н о в н ы м.

Основное правило обеспечивает конечность полностью целочисленного алгоритма Гомори при условии, что задача (1)—(4) имеет по крайней мере одно допустимое решение [1]. Оно обеспечивает конечность также модификации этого алгоритма, предложенной Ю. Ю. Финкельштейном ([2], с. 184—186). Часто под третьим алгоритмом Гомори понимается именно такой его вариант, который использует основное правило (напр., [2]).

2. Обобщенное правило. Основное правило имеет тот недостаток, что оно не позволяет выбирать замещающего ограничения в качестве производящего. Однако именно подходяще построенные замещающие ограничения часто существенно ускоряют алгоритм. Кроме основного правила у Р. Е. Гомори [1] имеется еще одно, гарантирующее конечность алгоритма. Оно позволяет циклически выбирать все строки с $a_{k0} < 0$ (в том числе и замещающие, хотя это явно не сказано). Однако желательно иметь такое правило, которое позволяло бы всегда выбирать производящую строку по ее качеству, а не по расположению в симплексной таблице. Тогда мы могли бы использовать на каждой итерации замещающее ограничение, если только оно достаточно хорошее. Такое правило содержится в нижеследующей теореме. При этом целесообразно ввести следующее понятие.

Будем говорить (ср. [1], с. 235), что вектор $A_j = (a_{0j}, a_{1j}, \ldots, a_{nj})^{\mathrm{T}}$

имеет степень вырожденности d, если $a_{0j} = \ldots = a_{d-1,j} = 0$ и $a_{dj} \neq 0$.

Теорема. *Если задача (1)—(4), симплексная таблица которой находится в l-нормальной форме, имеет хотя бы один план, то для обеспечения конечности полностью целочисленного алгоритма Гомори достаточно выбирать на каждой итерации в качестве производящего такое (заданное или замещающее) ограничение, при котором степень вырожденности d ведущего столбца (7) меньше чем*

$$k_0 = \min \{i \in I \mid a_{i0} < 0\}. \tag{10}$$

Доказательство. Если симплексная таблица не находится в допустимой форме, то такое ограничение всегда существует. Действительно, так как в силу $A_l > 0$ выполняется неравенство $d \leqslant k_0 - 1$, то таким является ограничение (5) с индексом $k = k_0$.

Пусть $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)^{\mathrm{T}}$ — некоторый план задачи (1)—(4) и $\bar{x}_0$ — значение целевой функции (1) при этом плане. Тогда, в силу (8), $a_{00}^t \geqslant \bar{x}_0$ при любом t. С увеличением t значение a_{00}^t может только уменьшаться и если оно уменьшается, то на целое число. Поэтому, даже если алгоритм бесконечен, начиная с некоторого t_0 величина a_{00}^t должна оставаться неизменной, т. е. $a_{00}^{t+1} = a_{00}^t$ при $t \geqslant t_0$ (иначе a_{00}^t будет меньше $\bar{x}_0$). Дальше рассмотрим a_{10}^t при $t > t_0$. Если было бы $a_{10}^t < 0$, то $k_0 = 1$ и A_l^t имел бы степень вырожденности 0. Но тогда вследствие симплексной итерации мы получили бы $a_{00}^{t+1} < a_{00}^t$, что противоречит предположению $t > t_0$. Значит, если $t > t_0$, то $a_{10}^t \geqslant 0$. Так как a_{10}^t может только уменьшаться и при этом на целое число, то, начиная с некоторого $t_1 \geqslant t_0$, величина a_{10}^t также остается постоянной, т. е. $a_{00}^{t+1} = a_{00}^t$ и $a_{10}^{t+1} = a_{10}^t \geqslant 0$ при $t \geqslant t_1$. Аналогичные рассуждения можно провести с компонентами $a_{20}^t, a_{30}^t, \ldots, a_{n0}^t$. Получим, что после конечного числа итераций они все станут неотрицательными целыми числами. Теорема доказана.

Правило выбора производящего ограничения, содержащееся в теореме, будем называть обобщенным правилом. Строка, выбранная по основному правилу Гомори, всегда может быть выбрана и по обобщенному правилу.

Условия теоремы можно ослабить, требуя выбора производящей строки по обобщенному правилу не на каждой итерации, а по крайней мере через каждые q итераций, где q — произвольное фиксированное число. Но вряд ли такой выбор имеет практическое значение.

Легко проверить, что применение обобщенного правила обеспечит конечность также вышеупомянутой модификации Ю. Ю. Финкельштейна.

В. Б. Ферстер [4] использует для ускорения полностью целочисленного алгоритма Гомори т. н. элементарные усиленные отсечения. Но получаемые отсечения могут определить ведущий столбец высокого порядка вырожденности и, как показывает пример в [4], это может даже испортить конечность алгоритма. Чтобы этого не произошло, в [4] вводится дополнительное правило выбора производящей строки. Неконечность алгоритма без этого правила объясняется тем, что элементарные усиленные отсечения могут не удовлетворять нашему обобщенному правилу (в примере [4] это именно так). Поэтому можно рекомендовать также такой вариант модификации В. Б. Ферстера [4], в котором элементарные усиленные отсечения используют только тогда, когда они удовлетворяют обобщенному правилу выбора производящей строки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гомори Р. Е.* В кн.: Календарное планирование. М., «Прогресс», 1966, 227—240.
2. *Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю.* Дискретное программирование. М., «Наука», 1969.
3. *Ху Т.* Целочисленное программирование и потоки в сетях. М., «Мир», 1974.
4. *Ферстер В. Б.* В кн.: Исследование по дискретной оптимизации. М., «Наука», 1976, 53—67.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 16/V 1983

L. KIVISTIK

GENEREERIVA REA ÜLDISTATUD VALIKUREEGEL GOMORY TÄIELIKULT TÄISARVULISE ALGORITMI JAOKS

Artiklis on esitatud Gomory täielikult täisarvulise algoritmi jaoks uus, senistest märksa paindlikum reegel genereeriva rea valikuks ja tõestatud, et algoritm on selle reegli kasutamisel lõplik.

L. KIVISTIK

A GENERALIZED RULE OF SELECTION OF A GENERATING ROW FOR GOMORY'S ALL-INTEGER ALGORITHM

In this paper the following integer programming problem is considered —

$$\max x_0 = a_{00} + \sum_{j\in J} a_{0j}(-x_j), \tag{1}$$

subject to

$$x_i = a_{i0} + \sum_{j\in J} a_{ij}(-x_j) \geqslant 0 \quad (i \in I), \tag{2}$$

$$x_j = 0 + (-1)(-x_j) \geqslant 0 \quad (j \in J), \tag{3}$$

$$x_j \text{ is integer } (j \in I \cup J \cup \{0\} = \{0, 1, \ldots, n\}). \tag{4}$$

The non-negative integer d is called the degeneracy degree of the vector $A_j = (a_{0j}, a_{1j}, \ldots, a_{nj})^{\mathrm{T}}$ if its coordinates satisfy the conditions $a_{0j} = \ldots = a_{d-1,j} = 0$ and $a_{dj} \neq 0$. There is proved the following

Theorem. *Assume that the simplex tableau of the problem (1)—(4) is lexicographically dually feasible and this problem has at least one plan. Then, if we choose for the generating row in every iteration step such a (given or surrogate) constraint that the degeneracy degree of the pivot column is smaller than*

$$k_0 = \min\{i \in I \mid a_{i0} < 0\},$$

the Gomory's all-integer algorithm is finite.