EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA. MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА. МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS. MATHEMATICS
1984, 33, 2

УДК 519.4

П. ПУУСЕМП

ОБ ОПРЕДЕЛЯЕМОСТИ ПРИМАРНОЙ ГРУППЫ МИЛЛЕРА—МОРЕНО ЕЕ ПОЛУГРУППОЙ ЭНДОМОРФИЗМОВ

(Представил А. Хумал)

1. Введение

Каждая конечная некоммутативная группа содержит в качестве одной из подгрупп группу Миллера—Морено, т. е. некоммутативную подгруппу, каждая собственная подгруппа которой является коммутативной. Этим фактом объясняется важность групп Миллера—Морено в теории конечных групп. В [1, 2] изучены автоморфизмы конечных групп Миллера—Морено. Цель настоящей работы — доказать, что каждая конечная примарная группа Миллера—Морено определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех групп.

Введем следующие обозначения: $\mathrm{End}\, G$ — полугруппа всех эндоморфизмов группы G; $\mathrm{Aut}\, G$ — группа всех автоморфизмов группы G; $Z(G)$ — центр группы G; G' — коммутант группы G; $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$; Z_r — кольцо вычетов по модулю r; C_r — циклическая группа порядка r; $\langle a, b, \ldots\rangle$ — подгруппа порожденная элементами $a, b, \ldots$; $|g|$ — порядок элемента g; $I_0(G)$ — множество всех ненулевых и неединичных идемпотентов полугруппы $\mathrm{End}\, G$; $K_G(x) = \{y \in \mathrm{End}\, G \mid yx = xy = y\}$; $J_G(x) = \{y \in \mathrm{End}\, G \mid yx = xy = 0\}$; $D_G(x) = \{y \in \mathrm{Aut}\, G \mid yx = xy = x\}$.

2. Об эндоморфизмах примарных групп Миллера—Морено

Известно (см. [3], предл. 6 и 7), что конечные примарные группы Миллера—Морено исчерпываются: 1) группой кватернионов; 2) группой $\langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, где $|a| = p^{n+1}$, $|b| = p^m$, $b^{-1}ab = a^{1+p^n}$ (p — простое число); 3) группой $M = (\langle c\rangle \times \langle a\rangle) \leftthreetimes \langle b\rangle$, где $|c| = p$, $|a| = p^m$, $|b| = p^n$, $bc = cb$, $[a, b] = c$ и $m \geqslant n \geqslant 1$ (p — простое число).

Полугруппы эндоморфизмов первых двух типов подробно изучены в [4, 5]. В частности там доказано, что эти два класса групп Миллера—Морено определяются своими полугруппами эндоморфизмов в классе всех групп. Поэтому рассмотрим здесь полугруппу эндоморфизмов группы M.

Из определяющих соотношений группы M следуют сразу равенства

$$(a^ib^jc^k)^t = a^{ti}b^{tj}c^{tk-ijt(t-1)/2}, \tag{1}$$

$$[a^ib^jc^k, a^tb^uc^v] = c^{iu-jt}, \tag{2}$$

$$M = \langle b, c\rangle \leftthreetimes \langle a\rangle, \tag{3}$$

$$M = \langle a, c\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle. \tag{4}$$

Лемма 1. *Полугруппа* $\mathrm{End}\, M$ *состоит из отображений* $f: M \to M$ *вида*

$$(a^s b^t c^v) f = (a^i b^j)^s (a^l b^q)^t c^{ks+rt+uv},$$

где $u \equiv qi - jl \pmod p$, $l \equiv 0 \pmod{p^{m-n}}$; *если* $p = 2$ *и* $m = 1$, *то* $ij \equiv lq \equiv 0 \pmod 2$.

Доказательство леммы 1 совершенно аналогично доказательству теоремы 1 в [2].

Лемма 2. *Для каждого* $x \in I_0(M)$ *полугруппа* $K_M(x)$ *изоморфна полугруппе* $\operatorname{End} C_{p^k}$, *где* $k \in \{m, n\}$.

Доказательство. Пусть $x \in I_0(M)$. Тогда $M = \operatorname{Ker} x \leftthreetimes \operatorname{Im} x$ (см. [6], лемма 1.1) и $K_M(x) \simeq \operatorname{End}(\operatorname{Im} x)$ (см. [6], лемма 1.6). Поэтому достаточно доказать, что группа $\operatorname{Im} x$ циклична и имеет порядок p^m или p^n.

Группы $\operatorname{Im} x$ и $\operatorname{Ker} x$ коммутативны, ибо они являются собственными подгруппами группы M. В силу некоммутативности группы M найдутся такие $g \in \operatorname{Im} x$ и $h \in \operatorname{Ker} x$, что $[g, h] \neq 1$. По определению группы Миллера—Морено ясно, что $M = \langle g, h \rangle$. Отсюда следует также равенство $\operatorname{Im} x = \langle g \rangle$.

Для вычисления порядка группы $\operatorname{Im} x$ предположим, что $g = a^i b^j c^k$ и $h = a^t b^u c^v$. По формуле (2) тогда $[g, h] = c^{iu-jt} \neq 1$. Поэтому $iu \not\equiv jt \pmod p$, т. е. $i, u \not\equiv 0 \pmod p$ или $j, t \not\equiv 0 \pmod p$. Рассмотрим сначала случай $i, u \not\equiv 0 \pmod p$. Тогда в силу $m \geqslant n$ и равенства (1) имеем $|g| \geqslant p^m$ и $|h| \geqslant p^n$. Покажем, что $|\operatorname{Ker} x| \geqslant p^{n+1}$. При $|h| > p^n$ это очевидно. Пусть $|h| = p^n = |b|$. Ввиду коммутативности группы $\langle g \rangle = \operatorname{Im} x \simeq M/\operatorname{Ker} x$ имеем $c = [a, b] \in M' \subset \operatorname{Ker} x$. Допустим, что $c \in \langle h \rangle$. Тогда $\langle c \rangle$ исчерпывает все элементы p-го порядка из $\langle h \rangle$ и, в частности, $h^{p^{n-1}} = a^{tp^{n-1}} b^{up^{n-1}} \cdot c^{vp^{n-1} - tup^{n-1}(p^{n-1}-1)/2} \in \langle c \rangle$. Но это противоречит условиям $|b| = p^n$ и $u \not\equiv 0 \pmod p$. Поэтому $c \notin \langle h \rangle$ и $|\operatorname{Ker} x| \geqslant |c| \cdot |h| = p^{n+1}$. Из неравенств $|g| \geqslant p^m$ и $|\operatorname{Ker} x| \geqslant p^{n+1}$ теперь в силу $|M| = |\operatorname{Ker} x| \cdot |g| = p^{m+n+1}$ следует, что $|g| = p^m$, т. е. $\operatorname{Im} x \simeq C_{p^m}$. Аналогично доказывается, что при $j, t \not\equiv 0 \pmod p$ имеет место $\operatorname{Im} x \simeq C_{p^n}$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Существуют такие* $x, y \in I_0(M)$, что

1) $K_M(x) \simeq \operatorname{End} C_{p^m}$, $K_M(y) \simeq \operatorname{End} C_{p^n}$;
2) $xy = yx = 0$;
3) $|J_M(x)| = p^{n+1}$, $|J_M(y)| = p^{m+1}$;
4) *если* $m = 1$, *то* $D_M(x) \cap D_M(y) = \langle 1 \rangle$.

Доказательство. Обозначим через x и y идемпотенты полугруппы $\operatorname{End} M$, соответствующие соответственно полупрямым разложениям (3) и (4), т. е.

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im} x = \langle a \rangle, \quad \operatorname{Ker} x = \langle b, c \rangle = \langle b \rangle \times \langle c \rangle, \\ &\operatorname{Im} y = \langle b \rangle, \quad \operatorname{Ker} y = \langle a, c \rangle = \langle a \rangle \times \langle c \rangle. \end{aligned} \tag{5}$$

Тогда $K_M(x) \simeq \operatorname{End}(\operatorname{Im} x) \simeq \operatorname{End} C_{p^m}$ (см. [6], лемма 1.6). Аналогично $K_M(y) \simeq \operatorname{End} C_{p^n}$. Так как $\operatorname{Im} x \subset \operatorname{Ker} y$ и $\operatorname{Im} y \subset \operatorname{Ker} x$, то $xy = yx = 0$. Следовательно, условия 1) и 2) выполняются.

Полугруппа $J_M(x)$ состоит из эндоморфизмов z группы M, для которых $xz = zx = 0$, т. е. $\operatorname{Im} x \subset \operatorname{Ker} z$ и $\operatorname{Im} z \subset \operatorname{Ker} x$. Поэтому $az = 1$, $bz = b^q c^r$, $cz = b^w c^u$ для некоторых $q, w \in Z_{p^n}$ и $r, u \in Z_p$. В силу леммы 1 $w = u = 0$, т. е. $|J_M(x)| = p^n \cdot p = p^{n+1}$. Аналогично $|J_M(y)| = p^{m+1}$. Справедливость условия 3) показана.

Предположим, что $m = 1$ и найдем, каким условиям должны удовлетворять az, bz и cz при $z \in D_M(x)$. Если $z \in D_M(x)$, то из $ax = a$ (ведь $\operatorname{Im} x = \langle a \rangle$ и $x^2 = x$) и $xz = x$ следует $az = (ax)z = ax = a$. Кроме того, в силу леммы 1.5 из [6] имеем $(\operatorname{Ker} x) z \subset \operatorname{Ker} x$. Поэтому

$bz = b^q c^r$, $cz = b^t c^u$ для некоторых $q, r, t, u \in Z_p$ (в силу $1 = m \geqslant n$ также $n = 1$). По лемме 1 $t = 0$ и $u = q$. Следовательно,

$$az = a, \quad bz = b^u c^r, \quad cz = c^u, \tag{6}$$

причем $y \neq 0$. в силу $z \in \operatorname{Aut} M$. Аналогично, если $z \in D_M(y)$, то $az = a^u c^k$, $bz = b$, $cz = c^u$. Если теперь $z \in D_M(x) \cap D_M(y)$, то, сравнив эти выражения с формулой (6), мы заключаем $az = a$, $bz = b$, $cz = c$, т. е. $z = 1$. Кроме того, ясно, что $1 \in D_M(x) \cap D_M(y)$. Справедливость условия 4) доказана. Лемма доказана.

3. Абстрактная характеристика полугруппы End$M$

В данном разделе докажем теорему

Теорема. *Для того чтобы конечная группа G была изоморфна группе M необходимо и достаточно, чтобы существовали такие $x, y \in I_0(G)$, которые удовлетворяют условиям 1)—4) леммы 3 и условию*

5) для каждого $z \in I_0(G)$ имеет место $K_G(z) \simeq \operatorname{End} C_{p^k}$, где $k \in \{m, n\}$.

Необходимость условий 1)—5) теоремы следует из лемм 2 и 3. Для доказательства достаточности сначала докажем ряд лемм. Во всех этих леммах предполагается, что группа G конечна и удовлетворяет условиям 1)—5).

Лемма 4. *Существуют такие $a, b \in G$, что $\operatorname{Im} x = \langle a \rangle \simeq C_{p^m}$, $\operatorname{Im} y = \langle b \rangle \simeq C_{p^n}$ и имеют место разложения*

$$G = (N \leftthreetimes \langle a \rangle) \leftthreetimes \langle b \rangle = (N \leftthreetimes \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle a \rangle, \tag{7}$$

где $N = \operatorname{Ker} x \cap \operatorname{Ker} y$.

Доказательство. Так как $K_G(x) \simeq \operatorname{End}(\operatorname{Im} x)$ (см. [6], лемма 1.6), то по условию 1) $\operatorname{End}(\operatorname{Im} x) \simeq \operatorname{End} C_{p^m}$. Отсюда следует изоморфизм $\operatorname{Im} x \simeq C_{p^m}$, ибо каждая конечная абелева группа определяется своей полугруппой эндоморфизмов (см. [6], теорема 4.2). Аналогично $\operatorname{Im} y \simeq C_{p^n}$. Поэтому существуют такие a и b, что $\operatorname{Im} x = \langle a \rangle$ и $\operatorname{Im} y = \langle b \rangle$. По условию 2) $\operatorname{Im} x \subset \operatorname{Ker} y$ и $\operatorname{Im} y \subset \operatorname{Ker} x$, т. е. $\operatorname{Ker} y = (\operatorname{Ker} x \cap \operatorname{Ker} y) \leftthreetimes \operatorname{Im} x = N \leftthreetimes \operatorname{Im} x$ и $\operatorname{Ker} x = N \leftthreetimes \operatorname{Im} y$. Из разложений $G = \operatorname{Ker} x \leftthreetimes \operatorname{Im} x = \operatorname{Ker} y \leftthreetimes \operatorname{Im} y$ следуют сразу равенства (7). Лемма доказана.

Пусть в дальнейшем a, b и N определены как в лемме 4.

Лемма 5. *Имеет место прямое разложение $G/N = \langle aN \rangle \times \langle bN \rangle \simeq C_{p^m} \times C_{p^n}$, причем $N \neq \langle 1 \rangle$.*

Доказательство. Из равенств (7) вытекает, что $G/N = \langle aN \rangle \leftthreetimes \langle bN \rangle = \langle bN \rangle \leftthreetimes \langle aN \rangle$ и $|aN| = |a|$, $|bN| = |b|$. Поэтому $G/N = \langle aN \rangle \times \langle bN \rangle \simeq C_{p^m} \times C_{p^n}$.

Если $N = \langle 1 \rangle$, то $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$. Кроме того, $\operatorname{Ker} x = \operatorname{Im} y = \langle b \rangle$ и $\operatorname{Ker} y = \operatorname{Im} x = \langle a \rangle$. По определению множества $J_G(x)$ ясно, что оно состоит из отображений вида $a \to 1$, $b \to b^i$, $i \in Z_{p^n}$. Поэтому $|J_G(x)| = p^n$, что противоречит условию 3. Следовательно, $N \neq \langle 1 \rangle$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Элементы a и b не коммутируют. Если $z \in I_0(G)$, то $\operatorname{Im} z \simeq C_{p^k}$, где $k \in \{m, n\}$.*

Доказательство. Если $z \in I_0(G)$, то $K_G(z) \simeq \operatorname{End}(\operatorname{Im} z)$ и по условию 5) $\operatorname{End}(\operatorname{Im} z) \simeq \operatorname{End} C_{p^k}$, где $k \in \{m, n\}$. Отсюда следует изоморфизм $\operatorname{Im} z \simeq C_{p^k}$.

Предположим, что $ab = ba$. Тогда ввиду (7) имеем $\langle a, b \rangle =$

$= \langle a\rangle \times \langle b\rangle$ и $G = N \leftthreetimes (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)$. Рассмотрим проекцию w группы G на подгруппу $\langle a\rangle \times \langle b\rangle$. Тогда $\mathrm{Im}\, w \simeq C_{p^m} \times C_{p^n}$ и по первой части доказательства ясно, что $w \notin I_0(G)$. Следовательно, $w = 1$ и $N = \langle 1\rangle$. Это противоречит лемме 5. Поэтому $ab \neq ba$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Порядок группы N делится на p.*

Доказательство. Предположим, что $|N|$ не делится на p. По теореме Шура (см. [7], с. 249) существует такая подгруппа P, что $G = N \leftthreetimes P$. Обозначим через z проекцию группы G на подгруппу P. Тогда $|\mathrm{Im}\, z| = |P| = |G/N| = |a| \cdot |b| = p^{m+n}$. Поэтому $z = 1$, ибо из $z \in I_0(G)$ следовало бы $\mathrm{Im}\, z \simeq C_{p^k}$, $k \in \{m, n\}$. Следовательно, $\mathrm{Ker}\, z = N = \langle 1\rangle$, что противоречит лемме 5. Лемма доказана.

Лемма 8. *Существует $c \in N$, для которого $|c| = p$ и $ac = ca$.*

Доказательство. Рассмотрим группу $\mathrm{Ker}\, y = N \leftthreetimes \langle a\rangle$ и ее силовскую p-подгруппу P, где $a \in P$. Тогда $N \cap P$ является силовской p-подгруппой группы N и $P = (N \cap P) \leftthreetimes \langle a\rangle$. По лемме 7 $N \cap P \neq \langle 1\rangle$. Поэтому существует $c \in N \cap P \subset N$, для которого $|c| = p$, $ac = ca$ (см. [8], теорема 2.6.4). Лемма доказана.

Лемма 9. *$J_G(y) = \{t_{ij} | i \in Z_{p^m},\ j \in Z_p\}$, где $t_{ij} = fts_{ij}$, $f : G \to G/N$ — естественный гомоморфизм, t — проекция группы G/N на прямое слагаемое $\langle aN\rangle$ (см. лемму 5), c — элемент из формулировки леммы 8, и гомоморфизм $s_{ij} : \langle aN\rangle \to \langle a^i c^j\rangle$ задается формулой $(aN)s_{ij} = a^i c^j$.*

Доказательство. Гомоморфизмы s_{ij} существуют для каждых $i \in Z_{p^m}$ и $j \in Z_p$, ибо $|a| = |aN| = p^m$, $|c| = p$ и $ac = ca$. Так как $\mathrm{Im}\, y = \langle b\rangle \subset \mathrm{Ker}\,(ft) \subset \mathrm{Ker}\, t_{ij}$ и $\mathrm{Im}\, t_{ij} \subset \mathrm{Ker}\, y$, то $y \cdot t_{ij} = t_{ij} \cdot y = 0$ и $t_{ij} \in J_G(y)$. Мы имеем $|a| \cdot |c| = p^{m+1}$ эндоморфизмов вида t_{ij}. По условию 3) $|J_G(y)| = p^{m+1}$. Следовательно, $J_G(y)$ совпадает с совокупностью эндоморфизмов вида t_{ij}. Лемма доказана.

Лемма 10. *$\langle c\rangle \triangle G$, $\langle a, b, c\rangle \triangle G$, $M \simeq \langle a, b, c\rangle$. Если $m > 1$, то все p-элементы группы N содержатся в $\langle c\rangle$. Для каждого $g \in G$ существуют такие $l(g), r(g) \in Z_p$, что $g^{-1}ag = ac^{l(g)}$, $g^{-1}bg = bc^{r(g)}$.*

Доказательство. Установим сначала, что все p-элементы из N лежат в $\langle c\rangle$. Пусть $h \in N$ и $h^{p^m} = 1$. Рассмотрим $fts \in \mathrm{End}\, G$, где f и t имеют свои прежние значения и гомоморфизм $s : \langle aN\rangle \to \langle h\rangle$ задается формулой $(aN)s = h$. Так как $\mathrm{Im}\,(fts) \subset \mathrm{Ker}\, y$ и $\mathrm{Im}\, y \subset \mathrm{Ker}\,(fts)$, то $(fts)y = y(fts) = 0$ и $fts \in J_G(y)$. По лемме 9 $fts = t_{ij}$ при некоторых i и j, т. е. $\langle h\rangle = \mathrm{Im}\,(fts) = \langle a^i c^j\rangle \subset \langle N, a\rangle$. В силу $\langle a, N\rangle = N \leftthreetimes \langle a\rangle$ и $c, h \in N$ отсюда следует, что $i = 0$ и $h \in \langle c\rangle$. Следовательно, из $h \in N$, $h^{p^m} = 1$ всегда следует, что $h \in \langle c\rangle$ и $|h| \in \{1, p\}$. Поэтому единственной подгруппой порядка p в N является $\langle c\rangle$ и при $m > 1$ все p-элементы группы N содержатся в $\langle c\rangle$. В частности, отсюда вытекает, что $\langle c\rangle \triangle G$ $\langle c\rangle \triangle \langle c, b\rangle$. Так как $\langle c, b\rangle$ является p-группой, то $cb = bc$ (см. [7], теорема 4.3.4). Ранее было доказано равенство $ac = ca$.

Покажем, что $\langle a, b, c\rangle \triangle G$ и группа $\langle a, b, c\rangle$ задается такими же определяющими соотношениями как и группа M. Так как $G = \mathrm{Ker}\, x \leftthreetimes \langle a\rangle$, то $G = g^{-1}Gg = \mathrm{Ker}\, x \leftthreetimes \langle g^{-1}ag\rangle$ при любом $g \in G$. Обозначим через z_g проекцию группы G на подгруппу $\langle g^{-1}ag\rangle$. Тогда $\mathrm{Im}\, z_g = \langle g^{-1}ag\rangle \subset \mathrm{Ker}\, y$ (ведь $a \in \mathrm{Ker}\, y$) и $\mathrm{Im}\, y \subset \mathrm{Ker}\, x = \mathrm{Ker}\, z_g$, т. е. $z_g y = y z_g = 0$ и $z_g \in J_G(y)$. По лемме 9 $z_g = t_{ij}$ для некоторых i и j. Тогда $\mathrm{Im}\, z_g = \langle g^{-1}ag\rangle = \langle a^i b^j\rangle$ и $g^{-1}ag \in \langle a, c\rangle$. Отсюда в силу $G' \subset N$ вытекает, что $a^{-1}g^{-1}ag = [a, g] \in N \cap \langle a, c\rangle = \langle c\rangle$, т. е.

$$g^{-1}ag = ac^{l(g)} \tag{8}$$

для некоторого $l(g) \in z_p$.

По равенству (8) имеем $b^{-1}ab = ac^{l(b)}$. Ввиду $ab \neq ba$ имеем $l(b) \neq 0$. Поэтому без ограничения общности можно предположить, что $l(b) = 1$ (в противном случае можно с самого начала заменить c на $c^{l(b)}$), т. е. $b^{-1}ab = ac$ и $[a, b] = c$. Следовательно, элементы a, b и c удовлетворяют одинаковым условиям в группах G и M. Поэтому $M \simeq \simeq \langle a, b, c\rangle$.

Рассуждая аналогично тому, как это делалось при $J_G(y)$, можно найти $J_G(x)$ и показать, что при $g \in G$

$$g^{-1}bg = bc^{r(g)} \tag{9}$$

для некоторого $r(g) \in Z_p$. Теперь в силу $\langle c\rangle \triangle G$ и равенств (8) и (9) ясно, что $\langle a, b, c\rangle \triangle G$. Лемма доказана.

Лемма 11. *Если $m = 1$ и элемент $d \in G$ перестановочен с элементами* a и b, то $d \in Z(G)$.

Действительно, если d перестановочен с a и b, то $d \in C_G(\operatorname{Im} x) \cap \cap C_G(\operatorname{Im} y)$ и, как легко установить, внутренний автоморфизм $\hat{d}$, порожденный элементом d, принадлежит группе $D_G(x) \cap D_G(y)$. По условию 4) заключаем $\hat{d} = 1$, $d \in Z(G)$.

Доказательство достаточности для теоремы. Ввиду леммы 10 надо доказать равенство $G = \langle a, b, c\rangle$. Предположим сначала, что $m > 1$. Тогда по лемме 10 все p-элементы группы N содержатся в $\langle c\rangle$, т. е. $\langle c\rangle$ является единственной силовской p-подгруппой группы N. Поэтому $G/\langle a, b, c\rangle$ является p'-группой. По теореме Шура существует такая p'-подгруппа H группы G, что $G = \langle a, b, c\rangle \leftthreetimes H$. Обозначим через z проекцию группы G на подгруппу H. Тогда $\operatorname{Im} z = H$ и $z \neq 1$. В силу леммы 6 $z \notin I_0(G)$. Следовательно, $z = 0$ и $G = \operatorname{Ker} z = = \langle a, b, c\rangle$.

Предположим теперь, что $m = 1$. Покажем сначала, что G является p-группой. Для произвольного $g \in G$ имеем по лемме 10 $g^{-1}ag = ac^{l(g)}$. По той же лемме c перестановочен с a и b, а тогда по лемме 11 $c \in Z(G)$. Поэтому $g^{-i}ag^i = ac^{il(g)}$, откуда в силу $|c| = p$ получим $g^p a = ag^p$. Если g является p'-элементом, то $g = g^{pj}$ для подходящего j, откуда $ga = ag$. Аналогично, $gb = bg$ для каждого p'-элемента g группы G. Поэтому по лемме 11 все p'-элементы группы G содержатся в $Z(G)$. Следовательно, $G = P \times Q$, где P — силовская p-подгруппа и Q — холловская p'-подгруппа группы G. Рассмотрим проекцию z группы G на Q. По лемме 6 ясно, что $z = 0$, т. е. $G = \operatorname{Ker} z = P$ и G является p-группой.

Покажем, что $G = \langle a, b, c\rangle$. Если это не так, то в силу $\langle a, b, c\rangle \triangle G$ существует $L \triangle G$, для которого $\langle a, b, c\rangle \subset L$ и $G/L \simeq C_p$ (см. [7], теорема 4.2.2.). Пусть $G/L = \langle gL\rangle$. Рассмотрим $u \in \operatorname{End} G$, определяемый формулой $(g^j h)u = c^j$ для любого $j \in Z_p$, $h \in L$. Тогда $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} y$ и $\operatorname{Im} y = \langle b\rangle \subset L = \operatorname{Ker} u$, т. е. $yu = uy = 0$ и $u \in J_G(y)$. По лемме 9 $u = t_{ij}$ при некоторых i и j. Так как $a \in L = \operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} t_{ij}$, то по определению t_{ij} имеем $t_{ij} = 0 = u$. Но по построению $u \neq 0$. Полученное противоречие показывает, что $G = \langle a, b, c\rangle$. Теорема доказана.

4. Основная теорема

Предположим, что полугруппа всех эндоморфизмов некоторой группы G изоморфна полугруппе всех эндоморфизмов некоторой конечной примарной группы Миллера—Морено H. Если H является примарной группой Миллера—Морено первых двух типов, то $H \simeq G$ (см. пункт 2). Поэтому предположим, что $H = M$. В силу конечности полугруппы $\operatorname{End} G$ группа G конечна (см. [9], теорема 2). Ввиду изоморфизма $\operatorname{End} G \simeq$

$\simeq \operatorname{End} H$ группа G удовлетворяет условиям 1)—5) теоремы, т. е. $G \simeq M = H$. Нами доказана

Основная теорема. *Если полугруппа всех эндоморфизмов группы G изоморфна полугруппе всех эндоморфизмов некоторой конечной примарной группы Миллера—Морено H, то группы G и H изоморфны.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нагребецкий В. Т., Адамов С. Н.* Матем. зап. Уральск. ун-та, **7**, № 3, 133—136 (1970).
2. *Нагребецкий В. Т.* Докл. АН УкрССР, сер. А, № 5, 75—77 (1980).
3. *Redei, L.* Comment. math. helv., **20**, 225—264 (1947).
4. *Пуусемп П.* Уч. зап. Тартуск. ун-та, № 390, 84—103 (1976).
5. *Пуусемп П.* Уч. зап. Тартуск. ун-та, № 390, 104—133 (1976).
6. *Пуусемп П.* Уч. зап. Тартуск. ун-та, № 366, 76—104 (1975).
7. *Холл М.* Теория групп. М., Изд. иностр. лит-ы, 1962.
8. *Gorenstein, D.* Finite groups. New York, Evanston, London, 1968.
9. *Alperin, J. L.* Pacif. J. Math., **12**, № 1, 1—5 (1962).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 13/V 1983

P. PUUSEMP

PRIMAARSE MILLER-MORENO RÜHMA MÄÄRATAVUSEST TEMA ENDOMORFISMIPOOLRÜHMAGA

Lõplikku mittekommutatiivset rühma, mille iga pärisalamrühm on kommutatiivne, nimetatakse Miller-Moreno rühmaks. Selliste rühmade automorfismirühmi on uuritud töödes [1,2]. Käesolevas artiklis aga näidatakse, et iga primaarne Miller-Moreno rühm, milles rühma elementide arv on algarvu aste, määratakse ära tema endomorfismipoolrühmaga kõigi rühmade klassis.

P. PUUSEMP

ON THE DETERMINITY OF THE PRIMARY MILLER-MORENO'S GROUP BY ITS SEMIGROUP OF ENDOMORPHISMS

All the endomorphisms of an arbitrary group A form a semigroup $\operatorname{End} A$. Let K be a class of groups and A a fixed group. If from the isomorphism of semigroups of all endomorphisms of groups A and $B \in K$ follows the isomorphism of groups A and B, then we say that the group A is determined by its semigroup of endomorphisms in the class K. For arbitrary group A, it is interesting to find classes of groups in which A is determined by its semigroup of endomorphisms. Some results concerning this problem are presented in the papers [4–6]. For example, in the paper [6] it is shown that an arbitrary finite abelian group is determined by its semigroup of endomorphisms in the class of all groups.

In this paper, using the methods and results of the papers [4–6], we study the determinity of primary Miller-Moreno's groups by their semigroups of endomorphisms. We want to remind that a finite noncommutative group is a Miller-Moreno's group if all its proper subgroups are commutative. Any noncommutative finite group contains a Miller-Moreno's group as a subgroup. Therefore it is very important to study the properties of Miller-Moreno's groups. In this paper the abstract characterization for the semigroups of all endomorphisms of primary Miller-Moreno's groups is described. From this characterization we obtain that any primary Miller-Moreno's group is determined by its semigroup of all endomorphisms in the class of all groups (the main theorem).