EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA. MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА. МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS. MATHEMATICS
1984, 33, 2

УДК 510

Г. МИНЦ

СТРУКТУРНЫЙ СИНТЕЗ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПОДЗАДАЧАМИ И МОДАЛЬНАЯ ЛОГИКА $S4$

(Представил Э. Тыугу)

Система программирования ПРИЗ [1] основана на автоматическом синтезе программ по спецификациям, заданным в виде пропозициональных формул. Синтез происходит в два этапа: 1) система строит (формальное) доказательство рассматриваемой формулы, 2) система строит по доказательству нужную программу. Первый этап называется *планированием*, второй — генерацией программ. Имеется несколько режимов планирования. Один из них (планирование с зависимыми подзадачами без рекурсии и дизъюнкции) приводит к корректному и полному алгоритму поиска вывода в интуиционистском исчислении высказываний [2]. Мы рассмотрим другой режим (*планирование с независимыми подзадачами*), первоначально введенный авторами ПРИЗа из чисто прагматических соображений, и докажем, что он приводит к корректному и полному алгоритму поиска вывода рассматриваемых формул в модальной логике $S4$ [3]. Существенное отличие от интуиционистского случая состоит в том, что для $S4$ рассматриваемые формулы не составляют, по-видимому, класса полиномиального сведения.

Напомним, что ПРИЗ имеет дело *с безусловными отношениями вычислимости* $\mathrm{K} \to V$ (где К — конъюнкция пропозициональных переменных, V — переменная) *и условными отношениями вычислимости* $R_1 \wedge \ldots \wedge R_n \to V$, где $R_1, \ldots, R_n$ — безусловные отношения вычислимости или переменные. Спецификация программы имеет вид *«на* $(R_1, \ldots, R_n)$ *из* $V_1, \ldots, V_m$ *вычислить* V*»*, где $R_1, \ldots, R_n$ — (условные или безусловные) отношения вычислимости или переменные, $V_1, \ldots, V_m$, V — переменные. Будем изображать ее пропозициональной формулой

$$(R_1 \wedge \ldots \wedge R_n \wedge V_1 \wedge \ldots \wedge V_m \to V). \qquad (1)$$

Правила структурного синтеза с независимыми подзадачами можно представить следующим образом (ср. [2]) в терминах *секвенций* $\Gamma \vdash A$, где Γ — неупорядоченный (возможно, пустой) список отношений вычислимости и переменных, A — отношение вычислимости или переменная. Формуле (1), например, может соответствовать секвенция $R_1 \ldots, R_n, V_1, \ldots, V_m \vdash V$.

Обозначим через SSR ind систему, определяемую схемой аксиом $\Gamma,\ V \vdash V$ и следующими двумя правилами:

$$\frac{\bigwedge\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} (\mathrm{K}_i \to U_i) \wedge \bigwedge\limits_{1 \leqslant j \leqslant q} V_j \to V;\quad \tilde{\mathrm{K}}_i \vdash U_i \ (1 \leqslant i \leqslant p);\quad \Sigma_j \vdash V_j \ (1 \leqslant j \leqslant q)}{\Sigma_1, \ldots, \Sigma_q \vdash V}$$

обозначаемое через ($\to$ — —),

где $\tilde{\mathbf{K}}$ — любой список, состоящий из переменных, входящих в конъюнкцию $\mathbf{K}$ (не обязательно всех),

$$\frac{\bigwedge\limits_{1\leqslant j\leqslant q} V_j \to V;\ \Sigma_i \vdash V_j\ (1\leqslant j\leqslant q)}{\Sigma_1, \ldots, \Sigma_q \vdash V}\ (\to -).$$

Система *SSR* ind приспособлена для построения выводов секвенций

$$V_1, \ldots, V_m \vdash V \qquad (2)$$

из *допущений* $R_1, \ldots, R_n$, где, как и раньше, $V_1, \ldots, V_m, V$ — переменные, $R_1, \ldots, R_n$ — отношения вычислимости.

Рассмотрим *перевод* формул и секвенций в язык *модальной логики*, при котором импликация $A \to B$ переходит в *строгую импликацию* $\Box(A \supset B)$. Перевод выражения E обозначим через E^*. Наша основная цель — доказательство следующего утверждения.

Теорема. *Секвенция*

$$R_1^*, \ldots, R_n^*, V_1, \ldots, V_m \vdash V \qquad (3)$$

*выводима в модальной логике S*4 *тогда и только тогда, когда секвенция (2) выводима из допущений* $R_1, \ldots, R_n$ *в системе SSR* ind.

Доказательство. Напомним, что правила *секвенциального варианта* логики *S*4 для $\supset$, $\Box$, $\bigwedge$ имеют следующий вид (ср. [3]):

$$\frac{A, \Box A, \Gamma \vdash \Delta}{\Box A, \Gamma \vdash \Delta}\ (\Box\vdash), \qquad \frac{\Box\Gamma \vdash A}{\Sigma, \Box\Gamma \vdash \Box A, \Pi}\ (\vdash\Box),$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A;\ B, \Gamma \vdash \Delta}{(A \supset B), \Gamma \vdash \Delta}\ (\supset\vdash), \qquad \frac{A, \Gamma \vdash B, \Pi}{\Gamma \vdash (A \supset B, \Pi)}\ (\vdash\supset),$$

$$\frac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{(A \wedge B), \Gamma \vdash \Delta}\ (\wedge\vdash), \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A;\ \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, (A \wedge B)}\ (\vdash\wedge).$$

Докажем сначала, что $*$-перевод *корректен*. Пусть дан *вывод* d секвенции (2) из допущений $R_1, \ldots, R_n$ в системе *SSR* ind. Припишем $R_1, \ldots, R_n$ слева от знака $\vdash$ ко всем секвенциям, входящим в d (добавляя $\vdash$ к левым посылкам правил), и заменим все формулы вида $(A \to B)$ на $\Box(A \supset B)$. При этом аксиомы $\Gamma, V \vdash V$ перейдут в аксиомы $\Sigma, \Gamma, V \vdash V$, допущения R_i перейдут в аксиомы $R_1^*, \ldots, R_i^*, \ldots, R_n^* \vdash R_i^*$, а каждое из правил $(\to{-}{-})$, $(\to -)$ — в серию правил логики *S*4. Поэтому секвенция (3) выводима в *S*4, что и нужно было доказать.

Для доказательства *«точности»* $*$-перевода применим обычную в теории доказательств специализацию вывода в $\{\Box, \supset, \bigwedge\}$-фрагменте логики *S*4.

Лемма. *По всякому выводу секвенции (3) в логике S*4 *можно построить такой вывод этой секвенции, в котором справа от* $\vdash$ *находится не более одной формулы и каждое применение правила* $(\Box\vdash)$ *входит в состав фигуры одного из следующих видов*

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\ldots \Box I;\ \Sigma \vdash V_j \ldots}{\Box I, \Sigma \vdash \bigwedge V_j} ;\quad V, \Box I, \Sigma \vdash W}{I, \Box I, \Sigma \vdash W}}{\Box(\bigwedge\limits_{1\leqslant j\leqslant q} V_j \supset V), \Sigma \vdash W}, \qquad (4)$$

где $V_1, \ldots, V_q, W$ — *переменные*, I *есть* $(\bigwedge\limits_{1\leqslant j\leqslant q} V_j \supset V)$;

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Box I,\ \Sigma^-,\ \tilde{K}_i \vdash U_i}{\Box I,\ \Sigma^-,\ K_i \vdash U_i}}{\Box I,\ \Sigma^- \vdash (K_i \supset U_i)}}{\ldots \Box I,\ \Sigma \vdash \Box (K_i \supset U_i) \ldots ;\quad \ldots \Box I,\ \Sigma \vdash V_j \ldots}\end{array}\right\}(5.1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\Box I,\ \Sigma \vdash \bigwedge_i \Box (K_i \supset U_i) \wedge \bigwedge_j V_j \ ;\ \Box I,\ V,\ \Sigma \vdash W}{\Box (\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant p} \Box (K_i \supset U) \wedge \bigwedge_{1 \leqslant j \leqslant q} V_j \supset V),\ \Sigma \vdash W}\end{array}\right\}(5.2) \qquad (5)$$

I обозначает формулу $(\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant p} \Box (K_i \supset U_i) \wedge \bigwedge_{1 \leqslant j \leqslant q} V_j \supset V)$, $U_i (1 \leqslant i \leqslant p)$, $V_j (1 \leqslant j \leqslant q)$, V, W *переменные*, K_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ — *конъюнкции переменных*, Σ^- *обозначает результат вычеркивания из* Σ *всех членов, не начинающихся с* $\Box$, *и* $\tilde{K}$ — *список переменных, получающийся из конъюнкции* K *заменой всех знаков* $\bigwedge$ *на запятые*;

всякое применение правила $\vdash\Box$ *входит в состав фигуры* (5).

Доказательство леммы. Рассмотрим произвольный вывод секвенции (3) в $S4$ без сечения. Ввиду *свойства подформульности*, главная формула любого применения правила $\Box\vdash$ имеет вид $\Box I$, указанный в (4) или (5), а главные формулы правил $\vdash\Box$ имеют вид $\Box (K_i \supset U_i)$ и происходят из формул $\Box I$ слева от $\vdash$. Пользуясь *обратимостью* всех правил для пропозициональных связок $\supset$, $\bigwedge$, сразу добиваемся того, чтобы ($\Box\vdash$) в применении к формулам, содержащим только одно вхождение $\Box$ (переводам безусловных отношений вычислимости), входили в состав фигур, отличающихся от (4) лишь тем, что W может быть списком переменных и формул вида $\Box (K \supset U)$, и W добавлен справа от $\vdash$ в двух левых верхних секвенциях. Применения ($\Box\vdash$) к переводам условных отношений вычислимости будут входить в фигуры, столь же несущественно отличающиеся от (5.2). Аналогично применения ($\vdash\Box$) и ($\vdash\supset$) входят в фигуры вида

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma^-,\ \tilde{K}_i \vdash U_i}{\Gamma^-,\ K_i \vdash U_i}}{\Gamma^- \vdash K_i \supset U_i}}{\Gamma \vdash \Box (K_i \supset U_i),\ \Pi} \qquad (6)$$

похожие на фигуру (5.1), где Π состоит из переменных и $\Box$-формул.

Теперь вычеркнем, начиная сверху, все лишние формулы сначала из аксиом, а затем из остальных секвенций, убирая по пути ставшие лишними применения правил и ветви вывода. Докажем, что после этого справа от $\vdash$ останется по одной формуле. Это свойство очевидно для аксиом и сохраняется при всех применениях правил, кроме, быть может, $\vdash\supset$. Однако для применений $\vdash\supset$ оно выполнено, так как они входят в фигуры (6). Для завершения доказательства осталось проверить, что части (5.1) и (5.2) фигуры (5) не могут отстоять далеко друг от друга и формула W в (4) и (5) не может иметь вида $\Box (K \supset U)$. Предположим, что некоторая фигура вида (5.1) не расположена непосредственно над «своей» фигурой (5.2). Выберем самую нижнюю такую фигуру Φ. Непосредственно под ней расположена фигура (4), (5) или (5.1), причем Φ расположена над правой посылкой правила ($\supset\vdash$). Если (для простоты записи) под Φ расположена фигура (4), то рассматриваемый участок вывода имеет следующий вид:

$$\dfrac{\overset{\cdots}{\Box I, \Sigma \vdash \bigwedge_j V_j}; \qquad \left.\dfrac{\overset{\cdots}{\Box I, \Sigma^- \vdash \mathrm{K} \supset U}}{V, \Box I, \Sigma \vdash \Box (\mathrm{K} \supset U)}\right\}\Phi,}{\dfrac{I, \Box I, \Sigma \vdash \Box (\mathrm{K} \supset U)}{\Box I, \Sigma \vdash \Box (\mathrm{K} \supset U)}}$$

где I есть $(\bigwedge_j V_j \supset V)$. Формула V слева от $\vdash$ в секвенции $V, \Box I, \Sigma \vdash \Box (\mathrm{K} \supset U)$, а вместе с ней и вся фигура (4) оказывается лишней, в противоречие с предположением о том, что все лишние фигуры уже вычеркнуты. Остальные случаи рассматриваются совершенно аналогично, что завершает доказательство леммы.

Окончание доказательства теоремы. Возьмем вывод секвенции (3), обладающий свойствами, указанными в лемме, и применим индукцию по его длине, чтобы построить вывод секвенции (2) из допущений $R_1, \ldots, R_n$. Базис индукции очевиден: вывод состоит из единственной аксиомы. В индукционном переходе нужно рассмотреть два случая: данный вывод кончается фигурой (4) или фигурой (5). Рассмотрим второй случай, так как первый получается из него просто вычеркиванием всего, относящегося к подформулам $\Box (\mathrm{K}_i \supset U_i)$. По индукционному предположению имеем выводы секвенций $\tilde{\mathrm{K}}_i \vdash U_i$ $(I \leqslant i \leqslant p)$, $\Sigma' \vdash V_j (1 \leqslant j \leqslant q)$ из допущений $R_1, \ldots, R_n$. Здесь Σ' — результат вычеркивания всех неатомарных формул из списка Σ. Формула $\Box I$ из рассматриваемой фигуры (5) имеет вид R_i^* $(i = 1, \ldots, p)$. Теперь вывод секвенции $\Sigma' \vdash W$ получается одним применением правила (→——), что завершает доказательство теоремы.

Замечание. Описанная только что конструкция по существу является стандартной перестройкой *генценовского L-вывода в натуральный* [4]. В нашем случае не понадобились наложенные в [4] ограничения на натуральный вывод в $S4$, и не пришлось вводить аппарат угловых скобок из приложения к [3], так как в рассматриваемом языке нет импликаций вида $A \supset \Box B$. Именно для устранения таких импликаций спецификациям придана форма (1) вместо интуиционистски эквивалентной формулировки из [2] в виде кратной импликации.

Автор благодарен авторам ПРИЗа, которые терпеливо разъясняли ему планирование с независимыми подзадачами и не дали отвернуться от этой проблематики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кахро М. И., Калья А. П., Тыугу Э. Х.* Инструментальная система программирования ЕС ЭВМ (ПРИЗ). М., «Финансы и статистика», 1981.
2. *Волож Б. М., Мацкин М. Б., Минц Г. Е., Тыугу Э. Х.* Кибернетика, № 6, 63—70 (1982).
3. *Фейс Р.* Модальная логика. М., «Наука», 1974.
4. *Prawitz, D.* Natural Deduction. Stockholm, Almquist and Wiksell, 1965.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
21/II 1983

G. MINTS

SÕLTUMATUTE ALAMÜLESANNETEGA STRUKTUURNE SÜNTEES JA MODAALNE LOOGIKA S4

Artiklis on tõestatud, et PRIZ-süsteemis kasutatavas sõltumatute alamülesannetega struktuurses sünteesis sisaldub täielik ja korrektne modaalse loogika S4 implikatiivsete valemite tõestuse otsimise algoritm.

G. MINTS

STRUCTURAL SYNTHESIS WITH INDEPENDENT SUBTASKS AND THE MODAL LOGIC S4

Programming system PRIZ is based on the automatic synthesis of programs from specifications described by propositional formulas. Synthesis is divided into two stages: 1) a derivation of the formula is constructed by the system; 2) the derivation is transformed by the system into required program. The first stage is called planning, the second stage is program generation. There are several planning options. One of them (planning with dependent subtasks without recursion) leads to a sound and complete procedure for the intuitionistic propositional calculus. We consider here another option (planning with independent subtasks) originally introduced by the authors of PRIZ on purely pragmatic grounds, and prove that it leads to a sound and complete procedure for the modal logic S4. Independence of subtasks means, in fact, deletion of the reiteration rule in Fitch-type natural deduction formulation. Structural synthesis rules in this case are obvious rules for strong S4-implication $A \rightarrow B = \Box(A \supset B)$. Main difference from the intuitionistic case is that the formulas considered do not probably form a polynomial reduction class for S4.