EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 32. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1983, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 32
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1983, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1983.2.04

УДК 681.51.015

Р. ТЕННО, Юта МИКОМЯГИ

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

(Представил Н. Алумяэ)

Ставится задача оценивания изменяющихся параметров линейного регрессионного уравнения в фиксированный момент времени по накопленным за весь период наблюдений данным, если его параметры изменяются по закону авторегрессии и скользящего среднего. Для решения этой задачи построена специальная модель, позволившая использовать метод наименьших квадратов. Показано, что оценки метода наименьших квадратов несмещены и эффективны, но несостоятельны.

1. Постановка задачи

1. Пусть частично наблюдаемый управляемый случайный процесс $(\beta, x, y)=\{\beta_t: t=\ldots,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ x_t, y_t: t=1,\ 2,\ \ldots\}$ определяется уравнениями:

$$\Phi\tilde{\beta}_t=\Theta\alpha_t, \tag{1}$$

$$x_t=z_t^{\mathrm{T}}\beta_t, \tag{2}$$

$$y_t=x_t+h_t, \tag{3}$$

где $\tilde{\beta}_t=\beta_t-\mu$, $z_t=(1, u_t^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$; $\beta_t, \alpha_t \in E^{k+1}$, $x_t \in E$; x_t, u_t — состояние и управление соответственно; y_t — наблюдаемое состояние; h_t — ошибка наблюдения; β_t — вектор ненаблюдаемых параметров управляемого объекта; $\{\alpha_t: t=\ldots, 0, 1, 2, \ldots\}$ — случайный процесс обновления; μ — вектор среднего процесса β; Φ, Θ — линейные операторы авторегрессии и скользящего среднего соответственно, равные

$$\Phi=\mathrm{I}-\sum_{i=1}^{m}\varphi_i B^i, \quad \Theta=\mathrm{I}-\sum_{i=1}^{m}\theta_i B^i,$$

I — единичная матрица, B — оператор сдвига $B^k\xi_t=\xi_{t-k}$ назад, если $k>0$ (прямое представление процесса β), и вперед, если $k<0$ (обратное представление), а φ_i, θ_i, $i=1, 2, \ldots, m$, — симметричные матрицы параметров.

Пусть ошибки наблюдения h_t, $t=1, 2, \ldots, N$, и импульсы обновления α_t, $t=1, 2, \ldots$, попарно и во времени независимы и распределены по нормальному закону

$$h_t\sim IN(0, r),\ r>0;\ \alpha_t\sim IN(0, D).$$

2. Допустимые управления $\{u_1, \ldots, u_t, \ldots u_N\}$ заданы непрерывными и ограниченными с вероятностью единица функциями

$$u_t = u_t(y_1, \ldots, y_{t-1}).$$

3. Ставится задача оптимальной (в среднеквадратичном смысле) интерполяции ненаблюдаемого процесса $\{\beta_t : t = 1, 2, \ldots, N\}$, т. е. построения оценок b_n неизвестных параметров β_n, $1 \leqslant n \leqslant N$, по накопленным входным X и выходным Y наблюдениям:

$$X = \left[\begin{array}{cc|c} z_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ 0 & z_2^{\mathrm{T}} & 0 \\ \hline 0 & 0 & z_N^{\mathrm{T}} \end{array}\right], \quad Y = \left[\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \hline y_N \end{array}\right], \text{ где } 0^{\mathrm{T}} \text{ — нулевой вектор.}$$

2. Уравнения интерполяции

В [1] при помощи модели пространства состояний показано, что случайный процесс $\{\beta_t, y_t : t = 1, 2, \ldots\}$ условно гауссов, т. е. условное распределение вероятностей $P(\beta_n \leqslant q | y_1, \ldots, y_N)$ гауссово для каждого $n = 1, 2, \ldots, N$. Как видно из структуры процесса (1)—(3), вектор среднего b_n и матрица ковариации D_n этого распределения могут быть определены на основе рекуррентных уравнений [2], как это было сделано при решении задачи фильтрации [1]. Мы же выбираем иной подход, а именно — строим специальную модель (см. лемму), которая позволяет решить задачу интерполяции как задачу оценивания параметров обычной линейной регрессии. Для этого нам потребуются следующие определения и обозначения:

1. Определение матрицы $\Gamma_i(l)$, $l = 1, 2, \ldots, i = 1, 2, \ldots$:

$$\Gamma_i(l) = \pi_2(l)\psi_{i-1} + \pi_3(l)\psi_{i-2} + \ldots + \pi_{i+1}(l)\psi_0, \tag{4}$$

где $\psi_j = 0$, если $j < 0$;

$$\pi_j(l) = \pi_{j+l-1} + \sum_{k=1}^{l-1} \pi_k \pi_j(l-k), \quad \pi_j(1) = \pi_j.$$

Здесь матрицы ψ_j, π_j заданы операторными уравнениями

$$\Psi = \Phi^{-1}\Theta, \quad \Pi = \Theta^{-1}\Phi,$$

где $\Psi = \psi_0 - \sum\limits_{j \geqslant 1} \psi_j B^j$, $\Pi = \pi_0 - \sum\limits_{j \geqslant 1} \pi_j B^j$.

2. Векторные обозначения

$$H = (h_1, h_2, \ldots, h_N)^{\mathrm{T}}, \quad A = (\ldots, \overset{\mathrm{T}}{\alpha_1}, \ldots, \overset{\mathrm{T}}{\alpha_{n-1}}, 0^{\mathrm{T}}, \overset{\mathrm{T}}{\alpha_{n+1}}, \ldots, \overset{\mathrm{T}}{\alpha_N}, \ldots)^{\mathrm{T}},$$

$$\Lambda = (\mu^{\mathrm{T}}, \mu^{\mathrm{T}}, \ldots, \mu^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$$

и матричные обозначения

$$V_n = \left[\begin{array}{c|c|c} \ddots \;\; \vdots & \vdots & \vdots \\ \ldots\; D & 0 & 0 \;\ldots \\ \hline \ldots\; 0 & 0 & 0 \;\ldots \\ \hline \ldots\; 0 & 0 & D \;\ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \;\; \ddots \end{array}\right], \qquad \Pi_n = \left[\begin{array}{c} \pi_1(n-1) \\ \ldots \\ \pi_1(1) \\ 1 \\ \pi_1(1) \\ \ldots \\ \pi_1(N-n) \end{array}\right],$$

$$
\Xi_n = \left[\begin{array}{cccccc}
\cdots & \psi_0 & \psi_1 & \psi_2 & \cdots & \psi_{n-2} \\
\cdots & 0 & \psi_0 & \psi_1 & \cdots & \psi_{n-3} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & & \psi_0 \\
\hline
\cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
\cdots & \Gamma_{n-1}(1) & \Gamma_{n-2}(1) & \Gamma_{n-3}(1) & \cdots & \Gamma_1(1) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \Gamma_{n-1}(N-n-1) & \Gamma_{n-2}(N-n-1) & \Gamma_{n-3}(N-n-1) & \cdots & \Gamma_1(N-n-1) \\
\cdots & \Gamma_{n-1}(N-n) & \Gamma_{n-2}(N-n) & \Gamma_{n-3}(N-n) & \cdots & \Gamma_1(N-n)
\end{array}\right.
$$

$$
\left.\begin{array}{c|cccccc}
0 & \Gamma_1(n-1) & \Gamma_2(n-1) & \cdots & \Gamma_{N-n-1}(n-1) & \Gamma_{N-n}(n-1) & \cdots \\
0 & \Gamma_1(n-2) & \Gamma_2(n-2) & \cdots & \Gamma_{N-n-1}(n-2) & \Gamma_{N-n}(n-2) & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \\
0 & \Gamma_1(1) & \Gamma_2(1) & \cdots & \Gamma_{N-n-1}(1) & \Gamma_{N-n}(1) & \cdots \\
\hline
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\
\hline
0 & \psi_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \psi_{N-n-2} & \psi_{N-n-3} & \cdots & \psi_0 & 0 & \cdots \\
0 & \psi_{N-n-1} & \psi_{N-n-2} & \cdots & \psi_1 & \psi_0 & \cdots
\end{array}\right].
$$

3. Определения функций

$$
\mathfrak{Y} = Y - X\Lambda, \quad \mathfrak{X}_n = X\Pi_n, \quad \xi_n = X\Xi_n A + H,
$$
$$
P_n = X\Xi_n V_n \Xi_n^{\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}} + r\,\mathrm{I}.
$$

Приведем основной результат, позволяющий решить задачу интерполяции:

Лемма. *Для каждого n, $1 \leqslant n \leqslant N$, выполняется уравнение*

$$
\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}_n \tilde{\beta}_n + \xi_n, \tag{5}
$$

причем $\xi_n \sim N(0, P_n)$.

Доказательство леммы дано в Приложении.

Используя уравнение (5), легко показать, что если матрица $\mathfrak{X}_n^{\mathrm{T}} P_n^{-1} \mathfrak{X}_n$ несингулярна, то величины $b_n = M\{\beta_n | y_1, \ldots, y_N\}$ и $D_n = \operatorname{cov}\{\beta_n | y_1, \ldots, y_N\}$ для каждого n, $1 \leqslant n \leqslant N$, определяются следующим образом:

$$
b_n = \mu + (\mathfrak{X}_n^{\mathrm{T}} P_n^{-1} \mathfrak{X}_n)^{-1} \mathfrak{X}_n^{\mathrm{T}} P_n^{-1} \mathfrak{Y}, \tag{6}
$$

$$
D_n = (\mathfrak{X}_n^{\mathrm{T}} P_n^{-1} \mathfrak{X}_n)^{-1}. \tag{7}
$$

Если принять, что допустимые управления заданы неслучайными функциями

$$
u_t(y_1, \ldots, y_{t-1}) = u_t,
$$

то по аналогии с регрессионным анализом убеждаемся в том, что b_n является для β_n несмещенной оценкой с наименьшей дисперсией. Специфичность модели (5) заключается в том, что матрица независимых переменных $\mathfrak{X}_n$ зависит от статистических свойств, характеризующих изменение процесса β во времени. Последним обусловлена несостоятельность оценок b_n. В Приложении доказано, что если матрица D положительно определена и случайный процесс β является стационарным, то с вероятностью единица $b_n \not\to \beta_n$ при $N \to \infty$.

Начальные условия (до момента $t=1$ и после момента $t=N$) уравнения (1) неизвестны. Поэтому определение матрицы ковариации P_n возмущений ξ_n связано с операцией умножения матриц V_n, Ξ_n неограниченных размерностей. В то же время известно [3], что если случайный процесс β стационарный и обратимый, то последовательности $\{\psi_1, \psi_2, \ldots\}$, $\{\pi_1, \pi_2, \ldots\}$ сходятся к нулю. Поэтому сходится к нулю и последовательность $\{\Gamma_1(l), \Gamma_2(l), \ldots\}$ для каждого $l = 1, 2, \ldots$. Отсюда следует возможность проведения практических вычислений с матрицами V_n, Ξ_n ограниченных размерностей.

Авторы выражают благодарность В. Куксу за полезные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы. Кроме обозначений и определений, данных в разделе 2, нам понадобятся следующие эквивалентные формы представления процесса (1):

$$\tilde{\beta}_t = \Psi\alpha_t, \qquad \Pi\tilde{\beta}_t = \alpha_t. \tag{П.1}$$

1. Зафиксируем момент интерполяции n, $1 \leqslant n \leqslant N$, и выразим параметры β_t, $t = 1, 2, \ldots, N$, через параметры β_n и импульсы обновления $\{\ldots \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}; \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots\}$ до и после момента n. Рассмотрим два случая.

Пусть $t = n+1, \ldots, N$. Тогда, согласно уравнениям (П.1), получим

$$\beta_t = \beta_n(t-n) + \sum_{i=0}^{t-n-1} \psi_i \alpha_{t-i}, \qquad \beta_n(t-n) = \mu + \sum_{i\geqslant 0} \pi_{i+1}(t-n)\tilde{\beta}_{n-i}. \tag{П.2}$$

Отсюда видно, что вектор прогноза $\beta_n(t-n)$ параметра β_t зависит не только от β_n, но и от последовательности $\{\beta_{n-1}, \beta_{n-2}, \ldots\}$. Используя уравнения

$$\tilde{\beta}_{n-i} = \sum_{j\geqslant 0} \psi_j \alpha_{n-i-j}, \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

элиминируем параметры β_{n-i}, $i > 1$, из выражений (П.2). Получим

$$\beta_t = \mu + \pi_1(t-n)\tilde{\beta}_n + \sum_{i>0} \pi_{i+1}(t-n) \sum_{j\geqslant 0} \psi_j \alpha_{n-i-j} + \\ + \sum_{i=0}^{t-n-1} \psi_i \alpha_{t-i} = \mu + \pi_1(t-n)\tilde{\beta}_n + \sum_{i\geqslant 1} \Gamma_i(t-n)\alpha_{n-i} + \sum_{i=0}^{t-n-1} \psi_i \alpha_{t-i}. \tag{П.3}$$

Пусть $t = 1, 2, \ldots, n-1$. Тогда на основе обратного представления процесса (1) по аналогии с предыдущим случаем имеем

$$\beta_t = \mu + \pi_1(n-t)\tilde{\beta}_n + \sum_{i\geqslant 1} \Gamma_i(n-t)\alpha_{n+i} + \sum_{i=0}^{n-t-1} \psi_i \alpha_{t+i}. \tag{П.4}$$

2. Введем обозначение $\mathfrak{B} = (\beta_1^\tau, \ldots, \beta_n^\tau, \ldots \beta_N^\tau)^\tau$. Учитывая уравнения (П.3) и (П.4), убеждаемся в том, что

$$\mathfrak{B} = \Lambda + \Pi_n \tilde{\beta}_n + \Xi A. \qquad (\text{П.5})$$

Подставив (П.5) в модель

$$Y = X\mathfrak{B} + H,$$

получим уравнение (5). Отметим, что вектор шума ξ_n распределен по нормальному закону с нулевым вектором среднего и положительно определенной матрицей ковариации P_n.

Доказательство свойства несостоятельности. Обозначим элементы матриц $\mathfrak{X}_n$, P_n, P_n^{-1} через x_t^n, $p_{t,s}^n$, $q_{t,s}^n$, t, $s = 1, \ldots, N$, соответственно. Пусть матрица D положительно определена и пусть случайный процесс β стационарный. Тогда последовательность $\{\pi_1(1), \pi_1(2), \pi_1(3), \ldots\}$ сходится [3] и существуют константы ϱ_1 и ϱ_2 такие, что

$$p_{t,s}^n < \varrho_1, \quad q_{t,s}^n < \varrho_2.$$

Кроме того, $x_t^n = z_t^\tau \pi_1(n-t) \to 0$, если $|n-t| \to \infty$. Поэтому существует ненулевая матрица λ такая, что

$$\mathfrak{X}_n^\tau P_n^{-1} \mathfrak{X}_n = \sum_{t,s=1}^{N} \pi_1(n-t) z_t q_{t,s}^n z_s^\tau \pi_1(n-s) \to \lambda,$$

если $N \to \infty$.

Следовательно, необходимое и достаточное условие состоятельности [4] для оценок b_n

$$(\mathfrak{X}_n^\tau P_n^{-1} \mathfrak{X}_n)^{-1} \to 0, \quad \text{если} \quad N \to \infty,$$

не выполняется.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Indjehagopian, J.-P.* Rev. franç. inform. et rech. opér., 15, № 1, 39—49 (1981).
2. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. М., «Наука», 1974.
3. *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Вып. 1. М., «Мир», 1974.
4. *Anderson, T. W., Taylor, J. B.* Ann. Statist., 4, № 4, 788—790 (1976).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
19 мая 1982

После переработки
3 сентября 1982

R. TENNO, Juta MIKOMÄGI

LINEAARSE STOHHASTILISE OBJEKTI PARAMEETRITE INTERPOLEERIMISE ÜLESANNE

On näidatud, et ajas muutuvate parameetritega lineaarse võrrandi abil kirjelduva juhitava objekti parameetrite interpoleerimise ülesanne on taandatav tavalisele vähimruutude meetodil hindamise skeemile. Saadud hinnangud on nihutamata ja efektiivsed, kuid pole konsistentsed.

R. TENNO, Juta MIKOMÄGI

INTERPOLATION OF THE PARTIALLY OBSERVABLE LINEAR STOCHASTIC PROCESS

It is assumed that a partially observable stochastic process $(\beta, y) = (\beta_t : t = \ldots, 0, 1, 2, \ldots; y_t : t = 1, 2, \ldots, N)$ is described by the equations

$$\Phi\beta_t = \Theta\alpha_t, \qquad y_t = z_t^\tau \beta_t + h_t, \tag{1}$$

where y, is an observable process; β, an unobservable multiple autoregressive moving — average process (Φ, Θ — linear operators, α — white noise process); $h = (h_t : t = 1, 2, \ldots, N)$, an independent nonsingular Gaussian process; $z = (z_t : t = 1, 2, \ldots, N)$, an observable almost surely bounded stochastic process

$$z_t = z_t(y_1, \ldots, y_{t-1}).$$

The problem here is how to get the estimates for the mean and (co)variance of the parameter β_n at any time instant n, $1 \leqslant n \leqslant N$, using observed processes y, z.

We have shown that the model (1) could be cast into a form suitable for the application of the general least squares technique. The properties of the obtained estimates are investigated:

1) if the process z is deterministic, then the estimate of the mean of the parameter β_n is unbiased and efficient;

2) if the process z is deterministic and the process β is nonsingular and stationary, then, unlike the least squares estimate in normal regression, the discussed estimate is unconsistent.

It is also shown that if the stochastic process is stationary and invertiable, the proposed estimators are applicable for practical computations.