EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 32. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1983, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 32
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1983, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1983.2.03

УДК 531.011; 62—50

*И. КЕЙС*

# О ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ КАНОНИЗИРУЕМЫХ СИСТЕМ

*(Представил Н. Алумяэ)*

Продолжено исследование интегральных и локальных свойств канонизируемых (квазиканонических) систем размерности $2n$ [1-4]. Показано, что эти системы имеют интегральные инварианты $i$-го порядка, причем обобщенный инвариант Пуанкаре определяет квазиканоничность системы $(i=\overline{1,2n})$. Установлено, что канонизируемые системы удовлетворяют обобщенному принципу Ливенса и модифицированному началу Гамильтона. Доказана теорема эквивалентности квазиканонической системы уравнению типа Пфаффа. Получен обобщающий случаи [3] класс регуляторов динамических систем Лагранжа, канонизируемых лишь преобразованием времени.

**1.** Согласно критерию канонизируемости системы $x^{\cdot}=X(t,x)$ $(\dim x==2n)$ [4], необходимо и достаточно, чтобы она имела обобщенный относительный инвариант Пуанкаре—Картана

$$I_1=\oint\limits_{\forall C}\omega(\delta),\ dI_1/ds=0\ (\omega(\delta)\overset{\triangle}{=}b\cdot\delta x+h\delta t,\ b=(b_i(t,x))^*),\qquad(1.1)$$

$$b_i,h(t,x)\subset C_2(t,x),\ s^{\cdot}=v^{-1}(t,x)\subset C_1(t,x),\ v\neq0,\ a\cdot b=\sum_{i=1}^{2n}a_ib_i$$

$$(i=\overline{1,2n}),$$

где $\omega(\delta)$ — пфаффиан класса $2n+1$ с коэффициентами $b_i(t,x)$, $h(t,x)$, $v(t,x)$ — произвольная, $C$ — любой замкнутый гладкий контур, пересекающий интегральную линию лишь в одной точке. Это равносильно заданию канонизируемой системы $2n$-союзными с формой $\omega(d)\overset{\triangle}{=}b\cdot dx+hdt$ уравнениями Пфаффа

$$Rx^{\cdot}=a,\ x=(q_1,\ \ldots,\ q_n,\ p_1,\ \ldots,\ p_n)^*,\ R=[r_{i\sigma}(t,x)],\ x^{\cdot}=dx/dt,\qquad(1.2)$$

$$r_{i\sigma}=\partial b_i/\partial x_\sigma-\partial b_\sigma/\partial x_i,\ a=\nabla_xh-b_t,\ \triangle R\overset{\triangle}{=}\det R\neq0\ \ (\nabla_xf\equiv f_x),$$

где $\Delta R>0$ из условия на класс $\omega(d)$ и выбора независимой переменной — времени $t$.

Поэтому рассмотрение динамики систем, сводимых в канонические гладким гомеоморфизмом $\tau=T(t,x)$, $\xi=\xi(t,x)$, $\dim\xi=2n$, проводится здесь в представлении их в виде (1.2). Во вспомогательных нормальных переменных $\tau$, $\xi$ формы $\omega$ [4,5] исходные уравнения и $\omega$ принимают вид

$$d\xi/d\tau=Z\nabla_\xi G,\ Z=\begin{bmatrix}0 & 1_n\\ -1_n & 0\end{bmatrix},\ \xi=(Q_i,P_\sigma)^*\ \ (i,\sigma=\overline{1,n}),\qquad(1.3)$$

$$\omega=\Omega\overset{\triangle}{=}P\cdot dQ-G(\tau,\xi)\,d\tau\ \ (\Delta_P(G)\overset{\triangle}{=}\Delta[\partial^2G/\partial P_i\,\partial P_\sigma]\neq0).$$

Функция нового времени $\tau=T(t,x)$ выбрана среди нормализующих $\omega$ переменных Пфаффа из условия неинвариантности $T(t,x)$ — в рассматриваемой области нормальности $G$ по $P$ имеем $T^{\cdot}\neq0$.

1.1. Интегральные свойства. Ясно, что любая канонизируемая (скрытая каноническая) система имеет согласно (1.1) обобщенный универсальный инвариант Пуанкаре $I_1^0=\oint b\cdot\delta x$ $(\delta t=0,\ dI_1^0/dt=0)$, где форма $b\cdot dx$ — класса $2n$ $(\Delta R>0)$. Обратно, если система имеет инвариант $I_1^0$ и $\Delta R\neq 0$, то $x^{\cdot}=X(t,x)$ — канонизируемая и обладающая инвариантом $I_1$ система, где произвольная $h(t,x)\subset C_2(t,x)$, $\omega$ — класса $2n+1$. Переходя к переменным $\tau$, $\xi$ системы (1.3), можно аналогично [6] показать, что всякий линейный по $\delta x$ относительный инвариант (1.2) вида $I_{1*}^0=\oint\limits_C b_*\cdot\delta x$ обязательно пропорционален $I_1^0$, т. е. $I_{1*}^0=c_*I_1^0$, где постоянная $c_*$ не зависит от выбранного в $I_1^0$, $I_{1*}^0$ контура интегрирования $C$. С помощью формулы Стокса находим абсолютный интегральный инвариант второго порядка $I_2^0$ системы (1.3)

$$I_1^0=\oint\limits_C b_i\delta x_i=-\int\limits_S r_{i\sigma}\delta x_i\delta x_\sigma=I_2^0\ \left(r_{i\sigma}=\frac{\partial b_i}{\partial x_\sigma}-\frac{\partial b_\sigma}{\partial x_i};\ dI_2^0/dt=0\right),\quad (1.4)$$

где интеграл взят по поверхности $S$, ограниченной замкнутым $C$. Известно, что в $2n$-мерном фазовом пространстве у системы (1.3), эквивалентной системе (1.2), существуют лишь следующие единственные (с точностью до постоянного множителя) универсальные относительные инварианты $I'_{2k-1}$ и абсолютные инварианты $I'_{2k}$ четных порядков

$$I'_1=\oint\limits_{C'}P\cdot\delta Q=I'_2=\int\limits_{S'}\sum_j^n\delta P_j\,\delta Q_j\quad (j,k=\overline{1,n}),\quad (1.5)$$

$$I'_3=\oint\limits_{D'_3}\sum P_j\,\delta Q_j\,\delta P_k\,\delta Q_k=\int\limits_{D'_4}\sum\delta P_j\,\delta Q_j\,\delta P_k\,\delta Q_k=I'_4,$$

$$I'_{2n-1}=\oint\limits_{D'_{2n-1}}\sum P_{j_1}\delta Q_{j_1}\ldots\delta P_{j_n}\,\delta Q_{j_n}=I'_{2n}=\int\limits_{D'_{2n}}\sum\delta P_{j_1}\delta Q_{j_1}\ldots\delta P_{j_n}\,\delta Q_{j_n}.$$

В случае известных нормальных переменных $T(t,\xi)$, $\xi(t,x)$ из (1.5) получим соответствующие универсальные интегральные инварианты $I_s^0(2<s\leqslant 2n)$ системы (1.3), используя формулы преобразования кратных интегралов при замене переменных. Так как инварианты $I_1^0$ и $I_{2n}^0$ представляют наибольший интерес в исследовании динамики, найдем закон преобразования множителя $M(t,x)$ системы $x^{\cdot}=X^{\cdot}(t,x)$ (не обязательно канонизируемой и четной размерности) при обратимой и гладкой замене переменных $\tau=\tau(t,x)$, $y=y(t,x)$ $(t=\theta(\tau,y)$, $x=\xi(\tau,y)$; $\tau,y\subset C_\perp(t,x))$, приводящей исходную к $dy/d\tau=\mathfrak{Y}(\tau,y)$ со множителем $N(\tau,y)$. Примем обозначения

$$\lambda=\lambda(t,x)=\tau^{\cdot},\ Y=y^{\cdot},\ \mathfrak{Y}=\lambda^{-1}Y\left(Y=Y(t,y),\ f^{\cdot}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+X_s\frac{\partial}{\partial x_s}\right)\circ f\right),\quad (1.6)$$

$$\lambda^*(t,y)=\lambda(t,x(t,y))=\tilde\lambda(\tau,y)\overset{\triangle}{=}\lambda(\theta(\cdot),\xi(\cdot))=\lambda(t,x)\ (s=\overline{1,m}).$$

Если функция $N(\tau,y)$ — множитель (1.6), то необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла уравнению

$$dN/d\tau+N\operatorname*{div}_y\mathfrak{Y}(\tau,y)=0\ \ (M_t+\operatorname*{div}_x MX=0).\quad (1.7)$$

С учетом (1.6) подстановкой в (1.7) находим множитель $N$ в виде

$$\hat{N}=\hat{\lambda}\theta_{\tau=\tau^*}\Delta^{-1}\tilde{M},\ \tilde{M}(\tau,y)\overset{\Delta}{=}M(\theta(\cdot),\xi(\cdot)),\ \Delta=\det[\partial y/\partial x]^{t\to\tau}_{x\to y}, \qquad (1.8)$$

$$\theta_{\tau=\tau^*}=(\partial\theta/\partial\tau)\,|_{\tau=\tau^*}=(\partial\tau^*/\partial t)^{-1}$$

$$(\tau^*(t,y)=\tau(t,x(t,y));\ \tau^*(0,y)=0,\ \tau(0,x)=0).$$

Если $\tau(0,x)\equiv 0$, то согласно (1.6), (1.7) находим

$$\tau^*(t,y)=\int_0^t\lambda^*[\sigma,y(\sigma,y^0)]d\sigma\,(y^{\cdot}=Y,\ y=y(t,y^0),\ y^0\overset{\Delta}{=}y(0,y^0)),$$

$$\tau^*_t=\lambda^*(0,y^0)+\int_0^t\lambda^*_t d\sigma.$$

Отсюда при $\lambda_t^*\equiv 0$ следует, что $\tau_t^*$ — инвариант преобразованной системы, ибо $\lambda^*(0,y^0)$ — ее инвариант. В этом случае $N^*=\tilde{\lambda}\Delta^{-1}\tilde{M}$ — множитель преобразованной системы. Обобщим рассмотренный случай.

Лемма. *Пусть $f(t,x)$ удовлетворяет уравнению $Df/Dt=w(x)$ ($w_t\equiv 0$), $\partial X_s/\partial t\equiv 0$ ($D/Dt=\partial/\partial t+X_s\partial/\partial x_s$). Тогда $f_t$ — инвариант исходной (и преобразованной) системы* $(s=\overline{1,m})$.

Действительно, ввиду $m$ последних условий операторы $\partial/\partial t$ и $D/Dt$ коммутативны: $\partial/\partial t\circ D/Dt=D/Dt\circ\partial/\partial t$. Дифференцируя это уравнение по $t$ частным образом с учетом коммутативности, получим равенство $Df_t/Dt=0$, доказывающее лемму. Используя ее и равенства $\tau^{\cdot}=\lambda$, $\lambda_t^*\equiv 0$, $Y_t\equiv 0$, замечаем, что предыдущий результат сохраняется при $\tau(0,x)\not\equiv 0$. Вид связи $t$, $\tau$ не требуется, если преобразование $x\to y$ задано решением $x=\varphi(t,y)$ системы уравнений $x^{\cdot}=Z(t,x)$ и выполнены условия $\partial\tilde{\lambda}/\partial\tau=0$, $\partial\tilde{Y}/\partial\tau=0$, $\partial\tilde{M}/\partial\tau=0$, $\Lambda_0\overset{\Delta}{=}\operatorname{div}_x Z=0$. Из $\tilde{\lambda}_\tau=0$, $\tilde{Y}_\tau=0$ находим, что $\tilde{\lambda}\Delta^{-1}\tilde{M}=N^*$ — множитель преобразованной системы. В силу $\Lambda_0=0$ и уравнения $\Delta_t^0=\Lambda_0\Delta^0$ имеем $\Delta^0=\Delta^0(y)=$ $=\det[\partial\varphi/\partial y]=\Delta^{-1}$, т. е. $\Delta\overset{\Delta}{=}\det[\partial y/\partial x]=\Delta(y)$. Отсюда $N^*$ не зависит явно от связи $t$, $\tau$ при $x=\varphi(t,y)$ и принятых условиях на $\tilde{\lambda}$, $\tilde{Y}$, $\tilde{M}$, $Z$ ($\tilde{f}=f(\theta(\tau,y),\xi(\tau,y))$. С учетом обозначений (1.6) система (1.2), эквивалентная (1.3) с $N=1$, имеет согласно (1.8) интегральный инвариант $I_{2n}$ и множитель вида

$$I_{2n}=\int_{D_{2n}}M(t,x)\delta x_1\ldots\delta x_{2n},\ M(t,x)=\lambda^{-1}\tau^*_t\Delta. \qquad (1.9)$$

1.2. Обобщенный принцип Ливенса. Решения (1.2) являются экстремалями линейного по $\tilde{x}^{\cdot}$ функционала Пфаффа

$$J[\tilde{x}]=\int_{t_0}^{t_1}(b\cdot\tilde{x}^{\cdot}+h)\,d\sigma\ \ (\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_{2n})^*=(\tilde{q}_1,\ldots,\tilde{p}_n)^*) \qquad (1.10)$$

в семействе линий $\tilde{x}[t]\subset C_1(t^0,t^1)$ с концами на $2(n+1)$-поверхностях

$$T(t_0,\tilde{x}(t_0))=\tau_0,\ Q(t_0,\tilde{x}(t_0))=Q_0;\ T(t_1,\tilde{x}(t_1))=\tau_1,\ Q(t_1,\tilde{x}(t_1))=Q_1, \quad (1.11)$$

где $Q_j=(Q_j(t,x))^*$, $j=\overline{1,n}$; $\tau_0$, $Q_0$, $\tau_1$, $Q_1$ — фиксированные постоянные.

Вычисляя при (1.11) вариацию (1.10) на решении $x(t)$ системы (1.2) и учитывая $\omega=\Omega$, получим равенства

$$\mathscr{E}_{\tilde{x}}\circ f_0\underset{x}{=}0,\ f_0=b(t,\tilde{x})\cdot\tilde{x}^{\cdot}+h(t,\tilde{x}),\ \mathscr{E}_{\tilde{x}}=\nabla_{\tilde{x}}-\frac{d}{dt}\circ\nabla_{\tilde{x}^{\cdot}}, \qquad (1.12)$$

$$\delta J[x]=[b(t,x(t))\cdot\delta x+h(t,x(t))\,\delta t]_0^1=[P\cdot\delta Q-G(\tau,\xi(\tau))\,\delta\tau]_0^1=0,$$

доказывающие утверждение. Система (1.2) имеет вариационную форму Эйлера для $J$. Расширение допустимого класса сравнения $\{\tilde{x}(t)\}$ (обычно с фиксированными концами для (1.3)) получено за счет применения части $\tau$, $Q_j$ нормализующих переменных. Заметим, что принцип Ливенса для (1.3) эквивалентен началу Гамильтона с лагранжианом $K(\tau,Q,Q')\stackrel{\Delta}{=}P\cdot Q'-G\,(Q'=\partial G/\partial P)$ лишь при фиксированных $\tau_0$, $Q_0$, $\tau_1$, $Q_1$. Аналогично [7,8] решения (1.2) можно интерпретировать как экстремали условной задачи Лагранжа в форме модификации начала Гамильтона.

1.3. Модифицированный принцип Гамильтона. Из обобщенного принципа Ливенса (1.10) — (1.12), используя вспомогательные переменные $\tau$, $\xi$ и результат [7,8], находим, что система (1.2) определяется следующим модифицированным принципом Гамильтона и удовлетворяет ему. Решения (1.2) — экстремали задачи Лагранжа — $\delta J[x]=0$ при краевых условиях (1.11) и $n$ линейных дифференциальных связях вида

$$l_j(t,x\,|\,x^\cdot)\stackrel{\Delta}{=}\partial Q_j/\partial t+x^\cdot_s\partial Q_j/\partial x_s-g_j(\partial T/\partial t+x^\cdot_s\partial T/\partial x_s)=0 \qquad (1.13)$$

$$(l_j=Q^\cdot_j-g_jT^\cdot=0,\ g_j(t,x)\stackrel{\Delta}{=}\partial G/\partial P_j;\ j=\overline{1,n};\ s=\overline{1,2n}).$$

Дифференциальные условия (1.13) — независимые линейные комбинации уравнений (1.2), где $l_j=\lambda_{js}\mathcal{E}_{xs}\circ f_0$, $\partial\lambda_{js}/\partial x^\cdot_\sigma\equiv 0$ $(s,\sigma=\overline{1,2n})$. Уравнения $l_j(\cdot\,|\,x^\cdot)=0$ относительно $x^\cdot_s$ имеют ранг $n$. В пространстве переменных $t$, $x$, $x^\cdot$ они представляют многообразие стационарности $Q'=\partial G/\partial P$ по $\bar{P}[\tau]$ действия Ливенса для (1.3), где ядро функционала $P\cdot Q'-G$ обращается в лагранжиан $K(\tau,Q,Q')$ системы (1.3). Краевые условия (1.11) соответствуют фиксированным значениям $\tau_0$, $Q_0$, $\tau_1$, $Q_1$ принципа Ливенса для (1.3). Из $\omega=\Omega$ при известных $\tau=T(t,x)$, $\xi=\xi(t,x)$ находим на связях (1.13) значение ядра $f_0\to f_0^*$ в виде линейной функции от $x^\cdot_s$

$$f_0^*=(b\cdot x^\cdot+h)\,|_{l=0}=(dT/dt)\,|_{l=0}\cdot K(T,Q,Q'),\quad l=(l_j)^*,\quad \tau=T(t,x), \qquad (1.14)$$

где $Q'=G_P=g(t,x)$, $(P\cdot Q'-G)\,dT=(b\cdot x^\cdot+h)\,dt$ $(j,\sigma=\overline{1,n})$.

В силу равенств, эквивалентных условиям нормализации $\omega$ в $\tau$, $\xi$

$$P_\sigma\,\partial Q_\sigma/\partial x_i-G\,\partial T/\partial x_i=b_i,\quad P_\sigma\,\partial Q_\sigma/\partial t-G\,\partial T/\partial t=h\quad(i=\overline{1,2n})$$

с заданной нормальной по $P$ функцией $G$, величина $T^\cdot$ принимает вид $T^\cdot=G^{-1}[P_j\,\partial Q_j/\partial t+x^\cdot_s P_j\,\partial Q_j/\partial x_s-(b_sx^\cdot_s+h)]$ $(\partial T^\cdot/\partial\tau=0$ при $\partial G/\partial\tau=0)$. Если заменить $T^\cdot$ при $l=0$ на ее значение из (1.2), то согласно (1.14) $f_0^*$ будет функцией лишь от $t$, $x$. Этот вариант обобщает рассмотренные в [3] упрощенные случаи $p=L_{q^\cdot}$, $b_\nu=0$ $(\nu=\overline{n+1,2n})$.

2. Локальные свойства. Теорема эквивалентности. Необходимость. Рассматривая вариацию функционала

$$J[\tilde{x}\,|\,t,t_0,x_0]=\int_{t_0}^{t}(b\cdot\tilde{x}^\cdot+h)\,dt$$

на экстремалях $x=f(t,x_0)$, определенных системой (1.2), найдем

$$\delta J = \delta \bar{S}(t, t_0, x_0) = (b\cdot\delta x + h\delta t)\,|_{t_0}^{t} \quad (S = J[f|\cdot],\ x_0 \equiv f(t, x_0)). \tag{2.1}$$

Фиксируя $t_0$ и обозначая $S = \bar{S}|_{t_0=\mathrm{fixconst}} = S(t, x_0)$, из равенств (2.1) и $dS = \delta J|_{t_0=\mathrm{fixconst}}$ получим, что решения $f(t, x_0)$ должны иметь локальное свойство, определенное уравнением типа Пфаффа на вектор-функцию $f(t,\ x_0)$

$$b(t, f(t, x_0))\cdot df + h(t, f(\cdot))\,dt = b(t_0, x_0)\cdot dx_0 + dS(t, x_0), \tag{2.2}$$

которое она обращает в тождество по $t,\ x_0$. Необходимость (2.2) доказана.

Переходя к $\tau$, $\xi$, получим для соответствующих решений $\xi = \varphi(\tau,\ \xi_0)$ ассоциированной канонической системы (1.3) равенства

$$b(t, f)\cdot df + h(\cdot)\,dt - dS = P\cdot dQ - G(\tau, \varphi(\cdot))\,d\tau - d\Psi(\tau, \xi_0), \tag{2.3}$$

$$S(t, x_0) = \Psi(\tau, \xi_0) = \int_{\tau_0}^{\tau} K(\tau, Q, Q')\,d\tau \quad (dS = d\Psi,\ P = \partial K/\partial Q'),$$

$$b_0\cdot dx_0 = P_0\cdot dQ_0 \quad (K = P\cdot Q' - G = (b\cdot x^{\cdot} + h)\,dt/d\tau,\quad \tau_0 = \tau(t_0, x_0) = \mathrm{fixconst}),$$

$$\xi_0 = \varphi(\tau_0, \xi_0),\ b_0 \stackrel{\triangle}{=} b(t_0, x_0),\ \xi = \varphi(\tau, \xi_0) \leftrightarrow x = f(t, x_0),\ \xi_0 \leftrightarrow x_0.$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Докажем обратное утверждение.

Пусть существуют непрерывно дифференцируемые функции $b_s(t, x)$, $h(t,\ x)$ — коэффициенты формы $\omega$ класса $2n+1$ и заданы функции $F(t, x_0)$, $F_t(t_0, x_0) \subset C_1$ $(\mathscr{T}\times\delta)$ $(\delta = \{x_0\}$ — область), где $\Delta[\partial F/\partial x_0] \neq 0$ $(F(t_0, x_0) \equiv x_0)$, приводящие $\omega$ к виду

$$\omega = b(t_0, x_0)\cdot dx_0 + dV(t, x_0)\ (V \subset C_2(t, x_0),\ b_t \equiv 0). \tag{2.4}$$

Тогда $F(t, x_0)$ — решения $f$ союзной с $\omega$ системы Пфаффа (1.2).

Введем нормализующие $\omega$ переменные $\xi = \xi(t, x)$, $\tau = T(t, x)$, $\xi, T \subset C_1(t, x)$, $\tau^{\cdot} \neq 0$, $\omega = \Omega \stackrel{\triangle}{=} P\cdot dQ - G(\tau, \xi)\,d\tau$. В этих координатах линии $x = F(t, x_0)$ соответствует кривая $\xi = \Phi(\tau, \xi_0)$, $\Phi(\tau_0, \xi_0) \equiv \xi_0$, а функция $V(t, x_0)$ переходит в $W(\tau, \xi_0) = V[\theta(\tau, \Phi(\tau, \xi_0),\ x_0(\xi_0)]\,(t = \theta(\tau, \xi))$. Фиксируя $t = t_0$ и, соответственно, $\tau = \tau_0$, аналогично (2.3) имеем

$$b(t, F)\cdot dF + h(t, F)\,dt = P\cdot dQ - G(\tau, \Phi)\,d\tau;\ dV = dW,\ b_0\cdot dx_0 = P_0\cdot dQ_0. \tag{2.5}$$

Согласно условиям (2.4), функции $\Phi(\tau, \xi_0)$, $W(\tau, \xi_0)$ имеют необходимую гладкость на образе $\mathscr{T}'\times\delta'$ произведения $\mathscr{T}\times\delta$, где $\Delta[\partial\Phi/\partial\xi_0] \neq 0$ $(W(\tau, \xi_0) \subset C_2,\ G(\tau, \xi) \subset C_1)$. В силу (2.4), (2.5) они удовлетворяют уравнению

$$P\cdot dQ - G(\tau, \Phi(\cdot))\,d\tau = P_0\cdot dQ_0 + dW(\tau, \xi_0)\quad (\xi = \Phi(\tau, \xi_0)), \tag{2.6}$$

где правая часть содержит $\tau$ лишь в $dW$. Из теоремы эквивалентности [8] для (1.3) заключаем, что $\Phi(\tau,\ \xi_0)$ — решения союзной с $\Omega$ системы (1.3). Поэтому $F(t, x_0)$ — решения (1.2). Достаточность доказана. Поэтому (1.2) удовлетворяет следующей модификации теоремы эквивалентности.

Т е о р е м а. *Система* (1.2) *эквивалентна при условиях* (2.4) *уравнению* (2.2) *с правой частью, зависящей от $t$ лишь в последнем члене.*

Этот результат обобщается аналогично [8] на случай решений (1.2), данных уравнениями $x = g(t, \gamma_0)$, где независимые параметры $\gamma_0$ задают траектории (1.2). Для этого достаточно сменить обозначения в соотношениях (2.2)—(2.6), после чего форма $b_0\cdot dx_0 + dS(t, x_0)$ примет вид $\beta(t_0, \gamma_0)\cdot d\gamma_0 + dR(t, \gamma_0)$. Достаточность главного условия (2.2) можно обосновать непосредственной проверкой (без перехода к $\xi$, $\tau$ и результата [8]).

**3.** Примеры. Найдем класс канонизируемых лишь преобразованием времени $t=\theta(\tau, q, q')$ и управляемых силами $f^0$ систем Лагранжа вида (1.2)

$$q^{\cdot}=H_p,\ p^{\cdot}=-H_q+f^0\Big(f^0,\ H\subset C_2(t,x),\ \Delta_p(H)\neq 0,\ q^{\cdot}=\frac{dq}{dt},\ q'=\frac{dq}{d\tau}\Big), \tag{3.1}$$

$$q=Q,\ t=\theta(\tau,q,q'),\ q^{\cdot}=\hat\lambda(\tau,q,q')q'$$

$$(\Delta=\hat\lambda^{n-1}\Delta_1\neq 0,\ \hat\lambda=\tau^{\cdot},\ p=L_{q^{\cdot}},\ L=p\cdot q^{\cdot}-H),$$

$$\hat\lambda\neq 0,\ \Delta_1=\theta_\tau(\hat\lambda+q'\cdot\hat\lambda_{q'})-\hat\lambda_\tau(q'\cdot\theta_{q'})\ \ (\hat\lambda^{-1}=\theta_\tau+q'\cdot\theta_q+q''\cdot\theta_{q'},\ f_x=\partial f/\partial x),$$

где $\theta$ определена производной $d\theta/d\tau=\hat\lambda^{-1}(\tau,q,q')$ в силу системы

$$q'=G_P,\ P'=-G_q$$

$$(P=K_{q'},\ K(\tau,q,q')=P\cdot q'-G,\ G(\tau,q,P)\subset C_2;\Delta_P G\neq 0), \tag{3.2}$$

удовлетворяющей принципу Гамильтона. В нее по условию сводится система (3.1) обратимым преобразованием при $\Delta\neq 0$. Функция $G$ не обязательно подобна $H(G(T,q,P)\not\equiv H(t,q,p))$. Обозначим

$$\lambda(\tau,q,q^{\cdot})=\hat\lambda(\tau,q,q')=\tilde\lambda(\tau,q,P),\ \Delta^0=-\mathfrak{G}[\lambda],\ \Delta_0=\hat\lambda+q'\cdot\hat\lambda_{q'}\neq 0, \tag{3.3}$$

$$0\neq\Delta_0\leftrightarrow\Delta^0\neq 0,\ \mathfrak{G}[f]=q^{\cdot}\cdot f_{q^{\cdot}}-f,$$

$$\vartheta(\tau,q,q^{\cdot})=\theta(\tau,q,q')=\tilde\theta(\tau,q,P)=t,$$

$$\tau=T(t,q,q^{\cdot}),\ M(\tau,q,q^{\cdot})=K(\tau,q,\lambda^{-1}q^{\cdot})\not\equiv L(t,q,q^{\cdot}),\ N=\lambda M\,(\Delta=\lambda^{n+1}\vartheta_\tau/\Delta^0).$$

Искомый класс зададим множеством $\{f^0\}$ всех регуляторов $f^0(t,x)$, при которых исходная система переходит в (3.2) преобразованием (3.1). Сперва покажем, что искомая система удовлетворяет при $\Delta^0\neq 0$ модифицированному принципу Гамильтона (раздел 2), в котором решения (3.1) — экстремали функционала $J_1$ при условии $\tau^{\cdot}=\lambda$, свободных $t_0$, $t_1$ и фиксированных значениях

$$\tilde q[t_0]=q_0,\ \tilde q[t_1]=q_1,\ \tau[t_0]=T(t,q_0,q^{\cdot}_0)=\tau_0,\ \tau[t_1]=T(t_1,q_1,q^{\cdot}_1)=\tau_1, \tag{3.4}$$

где $J_1=\int\limits_{t_0}^{t_1}N(\tau,q,q^{\cdot})\,dt,\ \delta J_1=0,\ N=\lambda K,\ q^{\cdot}=\lambda q'$.

Вводя множитель $\nu(t)$, импульс $\psi$ и функции $\varphi$, $g$ вида

$$\varphi=\lambda(M-\nu(t)),\ \psi=\varphi_{q^{\cdot}},\ g(\tau,q,\psi,\nu(t))=\psi\cdot q^{\cdot}-\varphi, \tag{3.5}$$

представим экстремали в канонической форме

$$q^{\cdot}=g_\psi,\ \psi^{\cdot}=-g_q,\ \tau^{\cdot}=g_\nu=\lambda,\ \nu^{\cdot}=-g_\tau \tag{3.6}$$

с краевыми условиями (3.4) и условием трансверсальности по $t$

$$g(\tau_1,q_1,\psi_1,\nu(t_1))=g(\tau_0,q_0,\psi_0,\nu(t_0))=0. \tag{3.7}$$

Так как из (3.5), (3.6) имеем $g^{\cdot}=g_t$, $g_t\equiv 0$, то согласно (3.7) $g[t]\equiv 0$. С учетом (3.3) $\nu=\nu^0\triangleq\mathfrak{G}[N]/\mathfrak{G}[\lambda]$. Введем функцию $V(\tau,q,\psi)$ уравнением $g(\tau,q,\psi,V)=0$. Дифференцируя тождество $g(\cdot,V(\cdot))\equiv 0$ по $q$, $\psi$, найдем, что экстремали (3.4) — (3.7) удовлетворяют системе

$$q^{\cdot}=-\lambda V_{\psi},\quad \psi^{\cdot}=\lambda V_q. \tag{3.8}$$

Из (3.2), (3.6) и значения $\nu=\nu^0$ получим равенства

$$V=M-\lambda^{-1}\psi\cdot q^{\cdot},\quad \psi=P+[K-V-(q'\cdot P)]\lambda_{q^{\cdot}},$$
$$\Delta^0\lambda^{-1}[q'\cdot P-K+V]=0\quad (\Delta^0\neq 0),$$

эквивалентные $V=-G$, $\psi=P$. Отсюда из (3.2), (3.8) следует стационарность $J_1$ при (3.4), $\tau^{\cdot}=\lambda$ на решениях системы (3.1), сводимой к (3.2) лишь преобразованием $t\to\tau(q\equiv Q)$. Совокупность искомых регуляторов $f^0(t,x)$ зависит от функций $T$, $\lambda$, $K$, $L$ и выражается равенствами

$$f^0=-L_q+L_{(1)}q^{\cdot}+l_{(1)}+\lambda^2L_{(0)}C(k_{(2)}-\lambda^{-1}K_{(1)}q^{\cdot}-k_{(1)})+\tilde{\lambda}'L_{(0)}q^{\cdot}, \tag{3.9}$$

$$L_{(1)}=[\partial^2L/\partial q^{\cdot}_i\,\partial q_s],\ L_0=[\partial^2L/\partial q^{\cdot}_i\,\partial q^{\cdot}_\sigma],\ l_{(1)}=\partial^2L/\partial t\,\partial q^{\cdot},\ \tau=T(t,q,q^{\cdot}),$$

$$C=[\partial^2G/\partial P_\sigma\,\partial P_s]=A^{-1},\ A=[\partial^2K/\partial q'_\sigma\,\partial q'_s],\ \Delta A\neq 0\ \ (i,\sigma,s=\overline{1,n}),$$

$$K_{(1)}=[\partial^2K/\partial q'_s\partial q_\rho],\ k_{(2)}=[\partial K/\partial q_s]^*,\ k_{(1)}=[\partial^2K/\partial\tau\,\partial q'_s]^*\ \ (q'=\lambda^{-1}q^{\cdot}),$$

где $T$ — решение уравнения $\vartheta(\tau,\cdot)=t$ при $\Delta\neq 0$, $\Delta^0\neq 0$, а остальные обозначения имеют смысл (3.1), (3.3). Подставляя $\tau=T(t,q,q^{\cdot})$ в (3.9), находим $\{f^0\}$ как вектор-функцию от $t,q,q^{\cdot}$. Задавая $\tilde{\lambda}$, $\theta$, можно рассматривать связь $(\tilde{\lambda})^{-1}=\tilde{\theta}_\tau+(\tilde{\theta},G)$ как уравнение для определения нормальной $G(\tau,q,P)$. Полученный класс обобщает рассмотренные в [3] случаи, где функция $T$ явно не фигурирует.

3.1. Система Рауса. Рассмотрим натуральную систему Лагранжа (3.1) при $r$ независимых линейных идеальных неголономных связях $Nq^{\cdot}+v=0$, взятых в разрешенном по $\zeta^{\cdot}$ виде

$$\zeta^{\cdot}=V\eta+v,\ V=[v_{\alpha' j}(t,q)],\ v=(v_{\alpha'}(t,q))^*\subset C_1(t,q), \tag{3.10}$$

$$q=\begin{bmatrix}\eta\\ \zeta\end{bmatrix},\ p=\begin{bmatrix}y\\ z\end{bmatrix},\ \eta=(q_j)^*,\ \zeta=(q_\alpha)^*,\ y=(p_j)^*,\ z=(p_\alpha)^*,$$

$$j=\overline{1,l},\ \overline{\alpha=l+1,m},$$

$$r=m-l=\dim z=\dim\zeta,\ N_{q^{\cdot}}=-v;\ \alpha'=\alpha-l=\overline{1,r},$$

$$N=[V,-1^r_r]\ —\ (r\times m)\text{-матрица},\ V\ —\ (r\times l)\text{-матрица},$$

$$H=1/2p\cdot H_2p+\gamma\cdot y+k\cdot z+H_0(t,q)\ (H_2,\gamma,k\subset C_1(t,q)).$$

Запишем уравнения движения этой системы с вектором множителей $\lambda(t)$ Рауса

$$y^{\cdot}=V^*\lambda-H_\eta,\ q^{\cdot}=H_p\ \ (p^{\cdot}=-H_q+N^*\lambda), \tag{3.11}$$

$$z^{\cdot}=-H_\zeta-\lambda,\ H_z=VH_y+v,\ 2\bar{H}_2\stackrel{\Delta}{=}y\cdot Ay+z\cdot Cz+2By\cdot z,$$

$$H_2=\begin{bmatrix}A & B^*\\ B & C\end{bmatrix}=[h_{ik}(t,q)]>0;\ i,k=\overline{1,m}=\dim q=\dim p,$$

$$A\ —\ (l\times l)\text{-},\quad B\ —\ (r\times l)\text{-},\quad C\ —\ (r\times r)\text{-матрицы}.$$

Исключим из (3.11) вектор $\lambda(t)$. Тогда из (3.11) с учетом (3.10) имеем

$$(C-VB^*)z=(VA-B)y+V\gamma+v-k. \tag{3.12}$$

Ограничимся системами Рауса, где

$$\Delta_0 \neq 0 \quad (\Delta_0 \overset{\Delta}{=} \det D_0,\ D_0 = C - VB^*). \tag{3.13}$$

Согласно (3.12), (3.13) $z$ будет линейной функцией $y$ вида

$$z = z_0(t, q \mid y) \overset{\Delta}{=} Zy + w \quad (Z \overset{\Delta}{=} D_0^{-1}(VA - B),\ w = D_0^{-1}(V\gamma + v - k)). \tag{3.14}$$

Дифференцируя (3.14), из (3.10), (3.11) находим вектор-функцию

$$\lambda = D_1^{-1}\{(VA - B) H_\eta - D_0(H_\zeta + Z^{\cdot} y + w^{\cdot})\}_0 = \lambda_0(t, q, y) \quad (\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)^*), \tag{3.15}$$

$$D_1 = D_0 + (VA - B) V^*,\ Z^{\cdot} = Z_0^{\cdot}(t, q, y) \overset{\Delta}{=} (dZ/dt) \mid_{q^{\cdot}} = (\partial H/\partial p)_0,$$

$$w^{\cdot} = w_t + w_q \cdot (\partial H/\partial p)_0 \overset{\Delta}{=} w_0(t, q, y) \quad ((\partial H/\partial p)_0 = (\partial H/\partial p) \mid_{z = z_0(t, q \mid y)}).$$

Нижний индекс «нуль» обозначает подстановку (3.14), (3.15) в (3.11) с учетом (3.10). При этом $\Delta_1 \overset{\Delta}{=} \det D_1 \neq 0$ в (3.15). Действительно, из положительности квадрики $2\tilde{\mathcal{H}}_2$ на $y + V^* z = 0$, $z \neq 0$, $2\tilde{\mathcal{H}}_2 \neq 0$, где она вида $z \cdot D_1 z > 0$, следует $\Delta_1 \neq 0$. Подставляя (3.14), (3.15) в (3.11), найдем ее замкнутую подсистему

$$q^{\cdot} = (H_p)_0, \quad y^{\cdot} = -(H_\eta)_0 + V^* \lambda_0(t, q, y) \tag{3.16}$$

размерности $2m - r$, четного порядка при $r = 2\varrho < m$ ($\varrho$ — целое). В последнем случае при условиях (3.10), (3.13) канонизируемая система (3.16) имеет все рассмотренные в разделах 1 и 2 динамические свойства.

Заметим, исходя из (1.2), что для канонизируемости системы $x^{\cdot} = X(t, x)$ ($\dim x = 2\varrho$) необходимо и достаточно, чтобы ее правая часть $X(t, x)$ была представима в виде $R^{-1}a$. Если же $X(t, x)$ задана, то для квазиканоничности этой системы достаточно, чтобы существовало решение системы $2\varrho$-линейных однородных уравнений в частных производных $RX = a$ относительно коэффициентов формы $\omega$ при условиях (1.1) и $\Delta R \neq 0$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Чаплыгин С. А.* Исследования по динамике неголономных систем. М.—Л., ГИТТЛ, 1941, с. 28—38.
2. *Биркгоф Дж. Д.* Динамические системы. М.—Л., ОГИЗ, ГИТТЛ, 1941, с. 34—54.
3. *Кейс И.* Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **29**, № 4, 439—441 (1980).
4. *Кейс И.* Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **30**, № 2, 109—116 (1981).
5. *Рашевский П. К.* Геометрическая теория уравнений с частными производными. М.—Л., ОГИЗ, Гостехиздат, 1947, с. 142—168.
6. *Hwa Chung Lee.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh A, **LXII**, 237—247 (1947).
7. *Гельфанд И М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. М., ГИФМЛ, 1961, с. 71—78, 210—228.
8. *Парс Л.* Аналитическая динамика. М., «Наука», 1971, с. 282—290.



*Институт кибернетики*
*Академии наук Эстонской ССР*



Поступила в редакцию
5 августа 1982

*I. KEIS*

## KANONISEERITAVATE SÜSTEEMIDE DÜNAAMILISTEST OMADUSTEST

Artiklis on analüüsitud $2n$-järguliste kanoniseeritavate süsteemide globaalseid ja lokaalseid omadusi. On saadud erinevad Poincaré-Cartani tüüpi integraalsed invariandid $I_m$ (1.5) globaalsete dünaamiliste omaduste kirjeldamiseks ($m=1,2n$), leitud Jacobi kordaja teisenduse valem (1.8) vastavalt kõigi muutujate (1.6) transformatsioonile ning esitatud üldistatud Livensi (1.11), (1.12) ning modifitseeritud Hamiltoni (1.11), (1.13) printsiibid kanoniseeritavate süsteemide jaoks. On tõestatud algsüsteemi ja Pfaffi võrrandi ekvivalentsuse teoreem kanoniseeritavuse puhul. Näitena on vaadeldud kanoniseeritavate süsteemide (3.1), (3.10) spetsiaalseid omadusi.

*I. KEIS*

## ON THE DYNAMICAL PROPERTIES OF THE SYSTEMS REDUCIBLE TO THE CANONICAL FORM

The global and the local properties of the systems noted in the headline, are investigated in this paper. Account is taken of the two basic ideas. The first one developes an analogy between a canonical and a quasi-canonical system, the second treats every quasi-canonical system as associated with the Pfaffian of the $2n+1$-rank, due to the relevant criterion in [4]. On this ground the systems (1.2) obtain relative integral invariants $I_{2k-1}$ of the odd order and absolute integral invariants $I_{2k}$ of the even order (see formulae (1.5)). Hence, the universal Poincaré-type invariant

$$I_1^0=\oint\limits_{\forall C} b\cdot\delta x, \quad dI_1^0/dt=0 \qquad (\text{see } (1.1))$$

defines the reducibility to the canonical form ($k=1, n$).

The Jacobi multiplier transformation rule, covering the general case (1.6) with the time substitution, is derived from (1.8). Under conditions (1.11), (1.13) the modified Hamilton and the generalized Livens principles are proposed.

The essential local properties relevant to the treated systems are established in the (2.2) statement.

As an example, the Lagrange and the Routh quasi-canonical systems are considered. The class of regulators (3.9) corresponding to the time transform (3.1) is obtained.