LÜHITEATEID * КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 31. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1982, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 31
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1982, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1982.2.19

УДК 519.661

В. ЯАНИМЯГИ

ПОСТРОЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА ПО ЗАДАННЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМ ТОЧЕК ПЕРВОГО ВЫХОДА

V. JAANIMÄGI. MITTEHOMOGEENSE MARKOVI PROTSESSI KONSTRUEERIMINE ESIMESTE VÄLJUMISTE VÄÄRTUSTE JAOTUSE PÕHJAL

V. JAANIMÄGI. CONSTRUCTION OF A MARKOV SPACE NONHOMOGENEOUS PROCESS FROM HITTING DISTRIBUTIONS

(Представил Н. Алумяэ)

С помощью метода [1] решается задача построения непрерывного строго марковского процесса с заданными распределениями точек первого выхода и формулируются достаточные условия существования более общего строго марковского процесса.

1. Определения и предварительные замечания. Пусть X — полное сепарабельное δ-компактное метрическое пространство с метрикой ϱ; $D=D_{R_+}(X)$ — множество всех функций $\xi:R_+\to X$, непрерывных справа и без разрывов второго рода; $\mathfrak{a}$ — класс открытых подмножеств множества X;

$$\tau_\Delta=\inf(t\geqslant 0:\xi(t)\in\Delta)\qquad(\Delta\in\mathfrak{a}),$$
$$\tau_R(\xi)=\tau_{S(x,R)}(\xi)\qquad(\xi(0)=x),$$

где $S(x,R)$ — открытая сфера с радиусом R и центром x.

Будем использовать следующие обозначения: при $t\in R_+$ отображения $\pi_t:D\to X$ и $\theta_t:D\to D$, где $\pi_t(\xi)=\xi(t)$ и $(\forall s\in R_+)\pi_s\theta_t(\xi)=\pi_{t+s}(\xi)$.

Пусть $N_t(\xi)\,(\xi\in D)$ — число точек разрыва функций ξ до момента t. На множестве $(\tau_\Delta<\infty)$ рассмотрим отображения $\pi_{\tau_\Delta}(\xi)=\pi_{\tau_\Delta(\xi)}(\xi)$, $\theta_{\tau_\Delta}(\xi)=\theta_{\tau_\Delta(\xi)}(\xi)$ и $N_{\tau_\Delta}(\xi)=N_{\tau_\Delta(\xi)}(\xi)$.

Обозначим

$$\tau_{\Delta_1}\dot{+}\tau_{\Delta_2}=\begin{cases}\infty:\tau_{\Delta_1}=\infty,\\ \tau_{\Delta_1}+\tau_{\Delta_2}\circ\theta'_{\tau_{\Delta_1}}:\tau_{\Delta_1}<\infty.\end{cases}$$

При $R>0$ имеем $\tau^k_R=\tau^{k-1}_R\dot{+}\tau_R$ $(k=1,2,\ldots)$ и $\tau^0_R=0$.

Рассмотрим отображение $L_R:D\to D$, в котором $\forall t\in R_+$ справедливо $\pi_tL_R(\xi)=\pi_{\tau^k_R}(\xi)$, где $(\exists k\in(0,1,2,3\ldots))\tau_R{}^k\leqslant t<\tau_R{}^{k+1}$.

Пусть

$$\overline{X}=X\cup\{\overline{\infty}\},\ \{\overline{\infty}\}\in X,$$
$$\gamma_{\tau_\Delta}(\xi)=\begin{cases}\overline{\infty}:\tau_\Delta(\xi)=\infty,\\ \pi_{\tau_\Delta}(\xi):\tau_\Delta(\xi)<\infty.\end{cases}$$

В дальнейшем рассматривается система субвероятностных ядер $H_\Delta = (H_\Delta(S|x))S \in \mathcal{B}(X)$, $x \in X$, $\Delta \in \mathfrak{a}$, для которой:

1) при любых $\Delta \in \mathfrak{a}$ и $x \in X$ субвероятностная мера $H_\Delta(\cdot|x)$ на $\mathcal{B}(X)$ сосредоточена $X \backslash \Delta$, причем если $x \overline{\in} \Delta$, то $H_\Delta(S|x) = I_S(x)$;

2) если $\forall B \in \mathcal{B}(x)$, $\Delta_1 \in \mathfrak{a}$, $k \geqslant 0$, $0 < r_0 < r_1 < \ldots < r_k \leqslant \infty$, то $H_\Delta(B|x_0)$ является $\mathcal{B}(X^{k+1})$-измеримой функцией от $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$, где $\Delta = \Delta_1 \cap S(x_0, r_0) \cap \ldots \cap S(x_k, r_k)$;

3) $\forall x_0 \in X$ и Δ_1, $\Delta \in \mathfrak{a}(\Delta_1 \subset \Delta)$, где Δ_1 и Δ могут зависеть от x_0, и $\forall B \in \mathcal{B}(X)$ справедливо $H_\Delta(B|x_0) = \int H_\Delta(B|x)\, H_{\Delta_1}(dx|x_0)$.

На σ-алгебрах $\sigma(\gamma_{\tau_R^k}, k=1, 2, \ldots)$ строятся меры R_x (см. [1]), причем любой τ_R^k является моментом регенерации (см. [2]) соответствующего семейства мер.

В дальнейшем некоторые достаточные условия для H_Δ будем формулировать в терминах R_x.

2. Построение непрерывного марковского процесса с заданными свойствами. Пусть для системы ядер H_Δ выполнены следующие условия:

1Н. Для $\forall R > 0$ и $\forall x \in X$ имеем $H_R(X|x) = 1$.

2Н. Для $\forall R > 0$ и $\forall x \in X$ имеем $H_R(\partial S_R|x) = 1$, где ∂S_R — граница открытой сферы $S(x, R)$.

3Н. Для $\forall R > 0$ и $\forall x \in X$ $\lim\limits_{K \uparrow X} H_{S(x,R) \cap K}(S(x, R)|x) = 0$, где K — компакт.

4Н. Для $\forall \varphi \in C(X)$ семейство $\{H_R^{*k}\varphi(x)\}$ равностепенно по R и k-непрерывно по x ($C(X)$ — множество непрерывных ограниченных функций на X).

Условие 2Н выполняется, очевидно, для распределений точек первого выхода любого непрерывного полумарковского процесса в пространстве X, а условие 3Н — для распределений точек первого выхода любого полумарковского процесса, для которого справедливо условие 1Н. Условие 4Н выполняется, например, для семейства ядер H_Δ, которому присуще следующее свойство: если $x_1, x_2 \in X$ и $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon$, то для $\forall R > 0$ верно $|H_R\varphi(x_1) - H_R\varphi(x_2)| < \varepsilon$.

Последовательность ступенчатых полумарковских процессов строится следующим образом:
пусть $r < 1$; для $\forall x \in X$ определяется мера $P_x^{(n)}$:

$$P_x^{(n)}\{\tau = r^n, \pi_\tau \in B\} = H_{r^n}(B|x) \quad (B \in \mathcal{B}(X)), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\tau(\xi) = \inf(t > 0 \colon \xi(t) \neq \xi(0))$ $(\xi \in D)$.
Распределение $P_x^{(n)}$ на D определяется из условия, что τ является моментом регенерации семейства вероятностных мер $(P_x^{(n)})_{x \in X}$. Таким образом, для $\forall n \geqslant 1$ $(P_x^{(n)})$ — полумарковский процесс с постоянными интервалами между скачками, равными r^n, и с переходной функцией $H_{r^n}(B|x)$.

Лемма 1 (о моменте первого выхода). *Справедливы следующие утверждения*:

1. $(\forall R > 0) \lim\limits_{t \to 0} \sup\limits_{n,x} P_x^{(n)}\{\tau_R < t\} = 0$.

2. $(\forall t > 0) \lim\limits_{R \to \infty} \sup\limits_{n,x} P_x^{(n)}\{\tau_R < t\} = 0$.

3. $(\forall t > 0)\ (\forall x \in X) \lim\limits_{K \uparrow X} \sup\limits_{n} P_x^{(n)}\{\tau_K < t\} = 0$.

Доказательство. Пусть $R > 0$. По условию непрерывности 2Н $P_x^{(n)}\{\tau_R \geqslant R\} = R_x\{r^n N_{\tau_R} L_{r^n} \geqslant R\} = R_x\{N_{\tau_R} L_{r^n} \geqslant R \mid r^n\} = 1$ для $\forall n$. Тогда если $t < R$, то $\sup\limits_{n,x} P_x^{(n)}\{\tau_R < t\} = 0$. Отсюда следуют первые два утверждения. По условию 3Н для $\forall R > 0$ $\lim\limits_{K \uparrow X} P_x^{(n)}\{\tau_K < \tau_R\} = 0$ (см. [1]),

$$\sup_n P_x^{(n)}\{\tau_K < t\} \leqslant \sup_n P_x^{(n)}\{\tau_K < \tau_R\} + \sup_n P_x^{(n)}\{\tau_R < t\},$$

откуда следует 3-е утверждение. Лемма доказана.

Следствие 1. *Для $\forall x \in X$ семейство вероятностных мер* $(P_x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ *слабо компактно.*

Доказательство следует из теоремы 2 работы [3].

Пусть последовательность $(P_x^{(n)})_1^{\infty}$ слабо сходится к вероятностной мере P_x на D. Очевидно, P_x — допустимое семейство. Из критерия Колмогорова для непрерывности процесса следует непрерывность траекторий процесса P_x.

Лемма 2. *Семейство вероятностных мер* $(P_x)_{x \in X}$ *λ-непрерывно* (см. [2]).

Доказательство. Из слабой сходимости следует

$$P_x^{(n)}\left\{\int_{R_t^k} e^{-\sum\limits_1^k \lambda_i t_i} \varphi_1(\pi_{t_1}) \ldots \varphi_k(\pi_{t_1+\ldots+t_k})\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_k\right\} \to$$

$$\to P_x\left\{\int_{R_t^k} e^{-\sum\limits_1^k \lambda_i t_i} \varphi_1(\pi_{t_1}) \ldots \varphi_k(\pi_{t_1+\ldots+t_k})\, dt_1 \ldots dt_k\right\}.$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$\left(P_x^{(n)}\left\{\int_{R_t^k} e^{-\sum\limits_1^k \lambda_i t_i} \varphi_1(\pi_{t_1}) \ldots \varphi_k(\pi_{t_1+\ldots+t_k})\, dt_1 \ldots dt_k\right\}\right)$$

равностепенно по n непрерывно по x. Для этого покажем, что $(P_x^{(n)}\{\varphi_1(\pi_{t_1}) \ldots \varphi_k(\pi_{t_1+\ldots+t_k})\})$ равностепенно по n непрерывно по x, а это следует из условия 4Н. Лемма доказана.

Следствие 2. $(P_x)_{x \in X}$ — *строго марковское семейство.*

Доказательство следует из теоремы 8 работы [1].

Теорема 1. *Если для семейства ядер H_Δ выполнены условия* 1Н—4Н, *то существует необрывающийся непрерывный строго марковский процесс P_x, для которого* $(\forall x \in X)$ $(\forall \Delta \in \mathfrak{a})$

$$P_x\{\pi_{\tau_\Delta}^{-1}(\cdot)\tau_\Delta < \infty\} = H_\Delta(\cdot \mid x).$$

Доказательство равносильно доказательству теоремы 9 работы [1].

3. Достаточные условия для существования строго марковского процесса с заданными распределениями точек первого выхода.

Замечание. В однородном случае (см. [1]) условия 3 и 4 (с. 211 и 212) для системы ядер можно заменить одним условием

А. $(\forall x \in X)(\forall R, r>0: r<R)(\exists C>1)(\forall a>0)\ R_x(N_{\tau_{Ra}} L_{ra})>C$.

В этом случае последовательность полумарковских процессов $(P_x^{(n)})_{n\geqslant 1}$ будет строиться с интервалами между скачками, равными $1/c^n$, и переходной функцией $H_{r^n}(B|x)$. Тогда справедлива

Теорема 2. *Если выполнено условие* А *и* $r<1/5$, *то для любого* $R>0$

$$\lim_{t\to 0}\sup_n P_x^{(n)}\{\tau_R<t\}=0.$$

Доказательство. Пусть $l>0$ таково, что $r^l<R$. Тогда

$$P_x^{(n)}\tau_R=R_x\frac{N_{\tau_R}L_{r^n}}{C^n}\geqslant\frac{m_{l+1,n}}{C^n}=\frac{m_{l+2}M_{l+1,n}}{C^n}=$$

$$=\frac{M_{l+1,n}M_{l+2,n}\ldots M_{n-1,n}}{C^n}>\frac{C^{n-l-1}}{C^n}=\frac{1}{C^{l+1}},$$

где $m_{l,n}=R_x(N_{\tau_{r^l}L_{r^{l+1}}\ldots L_{r^{n-1}}}L_{r^n})$, $M_{l,n}=R_x(N_{\tau_{r^l}}L_{r^{l+1}}\ldots L_{r^n})$.
Далее доказательство аналогично доказательству теоремы 5 работы [1] (с. 215).
Исходя из замечания сформулируем достаточные условия для существования необрывающегося строго марковского процесса, который может быть и неоднородным.

Теорема 3. *Пусть для системы ядер* (H_Δ) *выполнены условия*

1. $(\forall R>0)(\forall x\in X)\ \ H_R(X|x)=1$.
2. $(\forall R>r)(\exists C>1)(\exists A>0)(\forall a<A)\ \ R_x(N_{\tau_{Ra}}L_{ra})\geqslant C>1$.
3. $(\forall R>r)R_x(e^{-N_{\tau_R}L_r})$ — *непрерывная функция по* x.
4. $(\forall\varphi\in C(X))(\forall\Delta\in\mathfrak{a})H_\Delta\varphi(x)$ — *непрерывная функция по* x.

Тогда существует строго марковский процесс P_x *такой, что*

$$(\forall\Delta\in\mathfrak{a})P_x\{\pi^{-1}_{\tau_\Delta}(\cdot)\tau_\Delta<\infty\}=H_\Delta(\cdot|x).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Харламов Б. П., Яанимяги В. Э., Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР, 85, 207—224 (1979).
2. Харламов Б. П., Теория вероятностей и ее применение, XXV, № 3, 535—548 (1980).
3. Харламов Б. П., Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР, 72, 186—201 (1977).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
28/XII 1981