В. ЯАНИМАГИ

ПОСТРОЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА ПО ЗАДАНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМ ТОЧЕК ПЕРВОГО ВЫХОДА

V. JAANIMÄGI. MITTENHOMOGEENSE MARKOVI PROTSESSI KONSTRUEERIMINE ESIMESTE
VALJUMISTE VÄARTUSTE JAOTUSE PÕHJAL

V. JAANIMÄGI. CONSTRUCTION OF A MARKOV SPACE NONHOMOGENEOUS PROCESS FROM
HITTING DISTRIBUTIONS

(Представил Н. Алумяэ)

С помощью метода [1] решается задача построения непрерывного строго марковского процесса с заданными распределениями точек первого выхода и формулируются достаточные условия существования более общего строго марковского процесса.

1. Определения и предварительные замечания. Пусть X — полное сепарабельное δ -компактное метрическое пространство с метрикой ϱ ; $D = D_{R+}(X)$ — множество всех функций $\xi: R_+ \rightarrow X$, непрерывных справа и без разрывов второго рода; α — класс открытых подмножеств множества X ;

$$\tau_\Delta = \inf(t \geq 0 : \xi(t) \in \Delta) \quad (\Delta \in \alpha),$$

$$\tau_R(\xi) = \tau_{S(x,R)}(\xi) \quad (\xi(0) = x),$$

где $S(x, R)$ — открытая сфера с радиусом R и центром x .

Будем использовать следующие обозначения: при $t \in R_+$ отображения $\pi_t: D \rightarrow X$ и $\theta_t: D \rightarrow D$, где $\pi_t(\xi) = \xi(t)$ и $(\forall s \in R_+) \pi_s \theta_t(\xi) = \pi_{t+s}(\xi)$.

Пусть $N_t(\xi)$ ($\xi \in D$) — число точек разрыва функций ξ до момента t . На множестве $(\tau_\Delta < \infty)$ рассмотрим отображения $\pi_{\tau_\Delta}(\xi) = \pi_{\tau_\Delta}(\xi)$, $\theta_{\tau_\Delta}(\xi) = \theta_{\tau_\Delta}(\xi)$ и $N_{\tau_\Delta}(\xi) = N_{\tau_\Delta}(\xi)$.

Обозначим

$$\tau_{\Delta_1} + \tau_{\Delta_2} = \begin{cases} \infty : \tau_{\Delta_1} = \infty, \\ \tau_{\Delta_1} + \tau_{\Delta_2} \circ \theta'_{\tau_{\Delta_1}} : \tau_{\Delta_1} < \infty. \end{cases}$$

При $R > 0$ имеем $\tau_R^k = \tau_R^{k-1} + \tau_R$ ($k=1, 2, \dots$) и $\tau_R^0 = 0$.

Рассмотрим отображение $L_R: D \rightarrow D$, в котором $\forall t \in R_+$ справедливо $\pi_t L_R(\xi) = \pi_{\tau_R^k}(\xi)$, где $(\exists k \in (0, 1, 2, 3 \dots)) \tau_R^k \leq t < \tau_R^{k+1}$.

Пусть

$$\bar{X} = X \cup \{\infty\}, \quad \{\infty\} \in \alpha,$$

$$\gamma_{\tau_\Delta}(\xi) = \begin{cases} \infty : \tau_\Delta(\xi) = \infty, \\ \pi_{\tau_\Delta}(\xi) : \tau_\Delta(\xi) < \infty. \end{cases}$$

В дальнейшем рассматривается система субвероятностных ядер $H_\Delta = (H_\Delta(S|x))S \in \mathcal{B}(X)$, $x \in X$, $\Delta \in \alpha$, для которой:

1) при любых $\Delta \in \alpha$ и $x \in X$ субвероятностная мера $H_\Delta(\cdot|x)$ на $\mathcal{B}(X)$ сосредоточена $X \setminus \Delta$, причем если $x \in \Delta$, то $H_\Delta(S|x) = I_S(x)$;

2) если $\forall B \in \mathcal{B}(X)$, $\Delta_1 \in \alpha$, $k \geq 0$, $0 < r_0 < r_1 < \dots < r_k \leq \infty$, то $H_\Delta(B|x_0)$ является $\mathcal{B}(X^{k+1})$ -измеримой функцией от $(x_0, x_1, \dots, x_k)$, где $\Delta = \Delta_1 \cap S(x_0, r_0) \cap \dots \cap S(x_k, r_k)$;

3) $\forall x_0 \in X$ и $\Delta_1, \Delta \in \alpha (\Delta_1 \subset \Delta)$, где Δ_1 и Δ могут зависеть от x_0 , и $\forall B \in \mathcal{B}(X)$ справедливо $H_\Delta(B|x_0) = \int H_{\Delta_1}(B|x) H_{\Delta_1}(dx|x_0)$.

На σ -алгебрах $\sigma(\gamma_k^{\tau_k}, k=1, 2, \dots)$ строятся меры R_x (см. [1]), причем любой τ_k^R является моментом регенерации (см. [2]) соответствующего семейства мер.

В дальнейшем некоторые достаточные условия для H_Δ будем формулировать в терминах R_x .

2. Построение непрерывного марковского процесса с заданными свойствами. Пусть для системы ядер H_Δ выполнены следующие условия:

1Н. Для $\forall R > 0$ и $\forall x \in X$ имеем $H_R(X|x) = 1$.

2Н. Для $\forall R > 0$ и $\forall x \in X$ имеем $H_R(\partial S_R|x) = 1$, где ∂S_R — граница открытой сферы $S(x, R)$.

3Н. Для $\forall R > 0$ и $\forall x \in X \lim_{K \uparrow X} H_S(x, R) \cap K(S(x, R)|x) = 0$, где K — компакт.

4Н. Для $\forall \varphi \in C(X)$ семейство $\{H_R^{*h}\varphi(x)\}$ равномерно по R и k -непрерывно по x ($C(X)$ — множество непрерывных ограниченных функций на X).

Условие 2Н выполняется, очевидно, для распределений точек первого выхода любого непрерывного полумарковского процесса в пространстве X , а условие 3Н — для распределений точек первого выхода любого полумарковского процесса, для которого справедливо условие 1Н. Условие 4Н выполняется, например, для семейства ядер H_Δ , которому присуще следующее свойство: если $x_1, x_2 \in X$ и $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon$, то для $\forall R > 0$ верно $|H_R\varphi(x_1) - H_R\varphi(x_2)| < \varepsilon$.

Последовательность ступенчатых полумарковских процессов строится следующим образом:

пусть $r < 1$; для $\forall x \in X$ определяется мера $P_x^{(n)}$:

$$P_x^{(n)}\{\tau = r^n, \pi_\tau \in B\} = H_{r^n}(B|x) \quad (B \in \mathcal{B}(X)), \quad n=1, 2, \dots,$$

где $\tau(\xi) = \inf(t > 0: \xi(t) \neq \xi(0))$ ($\xi \in D$).

Распределение $P_x^{(n)}$ на D определяется из условия, что τ является моментом регенерации семейства вероятностных мер $(P_x^{(n)})_{x \in X}$. Таким образом, для $\forall n \geq 1$ ($P_x^{(n)}$) — полумарковский процесс с постоянными интервалами между скачками, равными r^n , и с переходной функцией $H_{r^n}(B|x)$.

Лемма 1 (о моменте первого выхода). Справедливы следующие утверждения:

$$1. (\forall R > 0) \lim_{t \rightarrow 0} \sup_{n, x} P_x^{(n)}\{\tau_R < t\} = 0.$$

$$2. (\forall t > 0) \lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{n, x} P_x^{(n)}\{\tau_R < t\} = 0.$$

$$3. (\forall t > 0) (\forall x \in X) \lim_{K \uparrow X} \sup_n P_x^{(n)}\{\tau_K < t\} = 0.$$

Доказательство. Пусть $R > 0$. По условию непрерывности 2Н $P_x^{(n)}\{\tau_R \geq R\} = R_x\{r^n N_{\tau_R} L_{r^n} \geq R\} = R_x\{N_{\tau_R} L_{r^n} \geq R | r^n\} = 1$ для $\forall n$. Тогда если $t < R$, то $\sup_{n,x} P_x^{(n)}\{\tau_R < t\} = 0$. Отсюда следуют первые два утверждения. По условию 3Н для $\forall R > 0 \lim_{K \uparrow x} P_x^{(n)}\{\tau_K < \tau_R\} = 0$ (см. [1]),

$$\sup_n P_x^{(n)}\{\tau_K < t\} \leq \sup_n P_x^{(n)}\{\tau_K < \tau_R\} + \sup_n P_x^{(n)}\{\tau_R < t\},$$

откуда следует 3-е утверждение. Лемма доказана.

Следствие 1. Для $\forall x \in X$ семейство вероятностных мер $(P_x^{(n)})_{n=1}^\infty$ слабо компактно.

Доказательство следует из теоремы 2 работы [3].

Пусть последовательность $(P_x^{(n)})_{n=1}^\infty$ слабо сходится к вероятностной мере P_x на D . Очевидно, P_x — допустимое семейство. Из критерия Колмогорова для непрерывности процесса следует непрерывность траекторий процесса P_x .

Лемма 2. Семейство вероятностных мер $(P_x)_{x \in X}$ λ -непрерывно (см. [2]).

Доказательство. Из слабой сходимости следует

$$\begin{aligned} P_x^{(n)} \left\{ \int_{R_t^h} e^{-\sum_1^h \lambda_i t_i} \varphi_1(\pi_{t_1}) \dots \varphi_h(\pi_{t_1+\dots+t_h}) dt_1 dt_2 \dots dt_h \right\} \rightarrow \\ \rightarrow P_x \left\{ \int_{R_t^h} e^{-\sum_1^h \lambda_i t_i} \varphi_1(\pi_{t_1}) \dots \varphi_h(\pi_{t_1+\dots+t_h}) dt_1 \dots dt_h \right\}. \end{aligned}$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$\left(P_x^{(n)} \left\{ \int_{R_t^h} e^{-\sum_1^h \lambda_i t_i} \varphi_1(\pi_{t_1}) \dots \varphi_h(\pi_{t_1+\dots+t_h}) dt_1 \dots dt_h \right\} \right)$$

равностепенно по n непрерывно по x . Для этого покажем, что $(P_x^{(n)}\{\varphi_1(\pi_{t_1}) \dots \varphi_h(\pi_{t_1+\dots+t_h})\})$ равностепенно по n непрерывно по x , а это следует из условия 4Н. Лемма доказана.

Следствие 2. $(P_x)_{x \in X}$ — строго марковское семейство.

Доказательство следует из теоремы 8 работы [1].

Теорема 1. Если для семейства ядер H_Δ выполнены условия 1Н—4Н, то существует необрывающийся непрерывный строго марковский процесс P_x , для которого $(\forall x \in X) (\forall \Delta \in \alpha)$

$$P_x\{\pi_{\tau_\Delta}^{-1}(\cdot) \tau_\Delta < \infty\} = H_\Delta(\cdot | x).$$

Доказательство равносильно доказательству теоремы 9 работы [1].

3. Достаточные условия для существования строго марковского процесса с заданными распределениями точек первого выхода.

З а м е ч а н и е. В однородном случае (см. [1]) условия 3 и 4 (с. 211 и 212) для системы ядер можно заменить одним условием

А. $(\forall x \in X) (\forall R, r > 0 : r < R) (\exists C > 1) (\forall a > 0) R_x(N_{\tau_{Ra}} L_{ra}) > C$.

В этом случае последовательность полумарковских процессов $(P_x^{(n)})_{n \geq 1}$ будет строиться с интервалами между скачками, равными $1/c^n$, и переходной функцией $H_{r^n}(B|x)$. Тогда справедлива

Теорема 2. Если выполнено условие А и $r' < 1/5$, то для любого $R > 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sup_n P_x^{(n)} \{ \tau_R < t \} = 0.$$

Доказательство. Пусть $l > 0$ таково, что $r^l < R$. Тогда

$$\begin{aligned} P_x^{(n)} \tau_R &= R_x \frac{N_{\tau_R} L_{r^n}}{C^n} \geq \frac{m_{l+1,n}}{C^n} = \frac{m_{l+2} M_{l+1,n}}{C^n} = \\ &= \frac{M_{l+1,n} M_{l+2,n} \dots M_{n-1,n}}{C^n} > \frac{C^{n-l-1}}{C^n} = \frac{1}{C^{l+1}}, \end{aligned}$$

где $m_{l,n} = R_x(N_{\tau_r^l L_{r^{l+1}} \dots L_{r^{n-1}} L_{r^n}})$, $M_{l,n} = R_x(N_{\tau_r^l L_{r^{l+1}} \dots L_{r^n}})$.

Далее доказательство аналогично доказательству теоремы 5 работы [1] (с. 215).

Исходя из замечания сформулируем достаточные условия для существования необрывающегося строго марковского процесса, который может быть и неоднородным.

Теорема 3. Пусть для системы ядер (H_Δ) выполнены условия

1. $(\forall R > 0) (\forall x \in X) H_R(X|x) = 1$.
2. $(\forall R > r) (\exists C > 1) (\exists A > 0) (\forall a < A) R_x(N_{\tau_{Ra}} L_{ra}) \geq C > 1$.
3. $(\forall R > r) R_x(e^{-N_{\tau_R} L_r})$ — непрерывная функция по x .
4. $(\forall \varphi \in C(X)) (\forall \Delta \in \alpha) H_{\Delta \varphi}(x)$ — непрерывная функция по x .

Тогда существует строго марковский процесс P_x такой, что

$$(\forall \Delta \in \alpha) P_x \{ \pi_{\tau_\Delta}^{-1}(\cdot) \tau_\Delta < \infty \} = H_\Delta(\cdot|x).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Харламов Б. П., Яанимяги В. Э., Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР, 85, 207—224 (1979).
2. Харламов Б. П., Теория вероятностей и ее применение, XXV, № 3, 535—548 (1980).
3. Харламов Б. П., Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР, 72, 186—201 (1977).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
28/XII 1981