EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 30. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1981, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 30
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1981, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1981.2.01

УДК 535.41 : 517.94

П. КАРД

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Введение

Одномерное волновое уравнение

$$d^2U/dz^2+k^2n^2(z)\,U=0, \tag{1}$$

где U — амплитуда монохроматической волны и $n(z)$ — зависящий от координаты z, но не зависящий от волнового числа k показатель преломления, имеет решение в замкнутом виде только для некоторых форм зависимости $n(z)$. Многие из этих решений давно известны и хорошо изучены (см., напр., [1]). В статьях [2–5] были приведены новые случаи волновых уравнений, решаемых в замкнутом виде. В настоящей статье мы изложим другую, более общую методику нахождения подобных уравнений и их решений, причем будут обнаружены новые примеры.

Метод

Излагаемый ниже метод является частной реализацией (в применении к одномерным волновым уравнениям) общего преобразования, связывающего решения двух линейных дифференциальных уравнений второго порядка (см. [6], с. 151). Насколько нам известно, до работ [2–5] этот метод в теории волновых уравнений не применялся.

Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$U(z)=F(z)\Theta(G(z)), \tag{2}$$

где $\Theta(G)$ удовлетворяет уравнению

$$d^2\Theta/dG^2+p(G)\Theta=0 \tag{3}$$

с некоторой, пока неконкретизируемой функцией $p(G)$. Подставляя решение (2) в уравнение (1), с учетом (3) находим

$$(2F'G'+FG'')\Theta'+(F''-FG'^2p+k^2n^2F)\Theta=0, \tag{4}$$

где штрих у G и F означает производную по z, а у Θ по G. Так как Θ определяется уравнением (3), то удовлетворить независимому уравнению (4) возможно только приравняв коэффициенты нулю. Итак,

$$2F'G'+FG''=0 \tag{5}$$

и

$$-FG'^2p+F''+k^2n^2F=0. \tag{6}$$

Интегрируя первое из этих уравнений, находим

$$F=G'^{-1/2}. \tag{7}$$

Подставляя это выражение во второе уравнение, получаем

$$k^2n^2=G'''/2G'-3G''^2/4G'^2+p(G)\,G'^2. \tag{8}$$

Далее положим

$$G'\equiv dG/dz=h^{-1}y^2(z)\,\Psi_1^2(G), \tag{9}$$

где $y(z)$ и $\Psi_1(G)$ — две новые функции, а h — постоянная размерности длины, означающая в конкретных задачах обычно толщину слоя. Отсюда находим производные G'' и G''' в виде:

$$G''=2h^{-2}y^4\Psi_1^3\Psi_1'+2h^{-1}yy'\Psi_1^2 \tag{10}$$

и

$$G'''=6h^{-3}y^6\Psi_1^4\Psi_1'^2+2h^{-3}y^6\Psi_1^5\Psi_1''+12h^{-2}y^3y'\Psi_1^3\Psi_1'+ \\ +2h^{-1}yy''\Psi_1^2+2h^{-1}y'^2\Psi_1^2, \tag{11}$$

где штрих у y означает производную по z, а у Ψ_1 по G. Подставляя эти выражения в уравнение (8), находим

$$k^2n^2=y''/y-2y'^2/y^2+G'^2(\Psi_1''/\Psi_1+p). \tag{12}$$

Далее введем еще две новые функции, пока произвольные, $f(y)$ и $q(G)$ и потребуем выполнения следующих уравнений:

$$d^2\Psi_1/dG^2+q(G)\,\Psi_1=0 \tag{13}$$

и

$$y''/y-2y'^2/y^2=f(y)/h^2. \tag{14}$$

Тогда соотношение (12) примет вид

$$k^2n^2=f(y)/h^2+G'^2(p(G)-q(G)). \tag{15}$$

Общее решение уравнения (14) таково:

$$z/h=\int y^{-2}[C+2\int y^{-3}f(y)\,dy]^{-1/2}\,dy, \tag{16}$$

где C — постоянная интегрирования. Интегрируя с учетом (13) уравнение (9), находим

$$\Psi_2(G)/\Psi_1(G)=h^{-1}\int y^2(z)\,dz, \tag{17}$$

где Ψ_2 — линейно независимое от Ψ_1 решение уравнения (13), причем оба нормированы так, что вронскиан равен единице:

$$\Psi_1\Psi'_2-\Psi'_1\Psi_2=1. \tag{18}$$

Из формул (16) и (17) следует также

$$\Psi_2(G)/\Psi_1(G)=\int[C+2\int y^{-3}f(y)\,dy]^{-1/2}\,dy. \tag{19}$$

Обратимся теперь к уравнению (15). Так как n зависит от z, но не зависит от k, а z вместе с y зависит, согласно формуле (19), от G, то ни y, ни G не могут зависеть от k. В силу уравнений (13) и (14) $f(y)$ и $q(G)$ тоже не могут зависеть от k. Следовательно, единственной функцией, могущей дать множитель k^2 в левую часть уравнения (15), является $p(G)$. Согласно сказанному положим

$$p(G)=q(G)+k^2h^2N^2(G)-h^{-2}f(y)\,G'^{-2}, \tag{20}$$

где $N(G)$ — еще одна функция, не зависящая от k. Иначе, в силу формулы (9) можно написать:

$$p(G)=q(G)+k^2h^2N^2(G)-f(y)\,y^{-4}\Psi_1^{-4}. \tag{21}$$

Из формулы (15) теперь следует

$$n=hN(G)\,dG/dz \tag{22}$$

или, опять в силу (9),

$$n=N(G)\,\Psi_1^2(G)\,y^2. \tag{23}$$

Наконец, уравнение (3) получает вид

$$d^2\Theta/dG^2+[q(G)+k^2h^2N^2(G)-f(y)\,y^{-4}\Psi_1^{-4}]\Theta=0. \tag{24}$$

Итак, мы пришли к следующему результату. Заданы три функции — $q(G)$, $N(G)$ и $f(y)$. Первую из них следует выбирать так, чтобы уравнение (13) решалось в замкнутом виде, а две остальные — так, чтобы в замкнутом виде решалось уравнение (24). При этом связь между G и y осуществляется формулой (19). Тогда волновое уравнение

$$d^2U/dz^2+k^2N^2(G)\,\Psi_1^4y^4U=0 \tag{25}$$

имеет замкнутое решение (см. формулы (2), (7) и (9))

$$U=y^{-1}\Psi_1^{-1}\Theta. \tag{26}$$

Заметим, что это решение получается в параметрическом виде, т. е. U получается как функция параметра G, а не координаты z. Показатель преломления (формула (23)) тоже задан как функция G. Следовательно, мы должны еще знать зависимость между G и z. Для этого имеем формулу (16), определяющую z как функцию y. А так как y уже выражено (по формуле (19)) в зависимости от G, то мы получаем и z как функцию G.

Исключение параметра возможно далеко не всегда, но если исключение невозможно, то часто бывает полезно произвести замену параметра с целью упрощения конечных формул.

Прежде чем перейти к примерам, отметим важный частный вариант, где

$$f(y)=0. \tag{27}$$

Интегралы в формулах (16) и (19) тогда легко вычисляются до конца, и мы получаем (заменив $C=c^2$):

$$y(z)=(cz/h+d)^{-1} \tag{28}$$

и

$$\Psi_2/\Psi_1=(az/h+b)\,(cz/h+d)^{-1}, \tag{29}$$

где a, b, c, d — постоянные интегрирования, связанные, в силу формулы (18), соотношением

1*

$$ad - bc = 1. \tag{30}$$

Уравнение (13) в этом варианте остается неизменным, а уравнения (24) и (25) и формулы (23) и (26) принимают вид

$$d^2\Theta/dG^2 + [q(G) + k^2h^2N^2(G)]\Theta = 0, \tag{31}$$

$$d^2U/dz^2 + k^2N^2(G)\Psi_1^4(cz/h+d)^{-4}U = 0, \tag{32}$$

$$n = N(G)\Psi_1^2(G)(cz/h+d)^{-2} \tag{33}$$

и

$$U = (cz/h+d)\Psi_1^{-1}\Theta. \tag{34}$$

Последний результат является обобщением полученного в [2]. В самом деле, положив в уравнениях (13) и (31) $q(G) = f(u)$, $N(G) = h^{-1}$, $\Psi = s$ и $\Theta = A$, мы получим соответствующие уравнения (6) и (9) статьи [2]. Формулы (29) и (32)—(34) можно несколько упростить. Поскольку из формулы (29), с учетом (30) вытекает

$$\Psi_1(G)(cz/h+d)^{-1} = a\Psi_1 - c\Psi_2, \tag{35}$$

то целесообразно переобозначить Ψ_1 и Ψ_2 согласно следующим линейным комбинациям

$$\begin{aligned} a\Psi_1 - c\Psi_2 &\to \Psi_1, \\ -b\Psi_1 + d\Psi_2 &\to \Psi_2, \end{aligned} \tag{36}$$

причем вронскиан для новых Ψ_1 и Ψ_2 по-прежнему равен единице. Тогда получим вместо формул (29) и (32)—(34) следующие более простые формулы

$$\Psi_2/\Psi_1 = z/h, \tag{37}$$

$$d^2U/dz^2 + k^2N^2(G)\Psi_1^4(G)U = 0, \tag{38}$$

$$n = N(G)\Psi_1^2(G) \tag{39}$$

и

$$U = \Psi_1^{-1}\Theta. \tag{40}$$

Примеры

Изложенный выше метод способен дать все или почти все полученные ранее в [2–5] результаты. Здесь мы приведем новые примеры.

I. В первом примере примем

$$f(y) = 0, \tag{41}$$

$$q(G) = A^2 - (\nu^2 - 1/4)G^{-2} \tag{42}$$

и

$$N(G) = (N_0^2 + \mu^2G^{-2})^{1/2}, \tag{43}$$

где A, N_0, μ, ν — постоянные. Решения уравнения

$$d^2\Psi/dG^2+[A^2-(\nu^2-1/4)G^{-2}]\Psi=0, \tag{44}$$

удовлетворяющие условию (18), суть

$$\begin{aligned}\Psi_1&=G^{1/2}Z^{(1)}_\nu(AG),\\ \Psi_2&=G^{1/2}Z^{(2)}_\nu(AG),\end{aligned} \tag{45}$$

где $Z_\nu^{(1)}$ и $Z_\nu^{(2)}$ — произвольные, линейно независимые функции Бесселя ν-го порядка с вронскианом, равным $(AG)^{-1}$. Для Θ имеем уравнение

$$d^2\Theta/dG^2+[A^2+k^2h^2N_0^2-(\nu^2-k^2h^2\mu^2-1/4)G^{-2}]\Theta=0, \tag{46}$$

решение которого есть

$$\Theta=G^{1/2}Z_{(\nu^2-k^2h^2\mu^2)^{1/2}}((A^2+k^2h^2N_0^2)^{1/2}G). \tag{47}$$

Следовательно, согласно формулам (38) и (40), волновое уравнение

$$d^2U/dz^2+k^2(N_0^2G^2+\mu^2)Z^{(1)4}_\nu(AG)U=0 \tag{48}$$

имеет решение

$$U=Z^{(1)-1}_\nu(AG)Z_{(\nu^2-k^2h^2\mu^2)^{1/2}}((A^2+k^2h^2N_0^2)^{1/2}G), \tag{49}$$

причем параметр G связан с координатой z соотношением

$$z/h=Z^{(2)}_\nu(AG)/Z^{(1)}_\nu(AG) \tag{50}$$

(см. формулу (37)).

В этом примере исключение параметра невозможно, но некоторое упрощение достигается заменой

$$AG\to G,\quad N_0\to A^2. \tag{51}$$

Тогда формулы (48)—(50) примут вид:

$$d^2U/dz^2+k^2(A^2G^2+\mu^2)Z^{(1)4}_\nu(G)U=0, \tag{52}$$

$$U=Z^{(1)-1}_\nu(G)Z_{(\nu^2-k^2h^2\mu^2)^{1/2}}(G(1+k^2h^2A^2)^{1/2}) \tag{53}$$

и

$$z/h=Z^{(2)}_\nu(G)/Z^{(1)}_\nu(G). \tag{54}$$

Этот результат является обобщением примера, приведенного в [2], и сводится к тому при $\mu=0$. Он обобщает также основной результат статьи [4], для получения которого следует взять $A=0$.

II. Для второго примера оставим в силе (41) и выберем

$$q(G)=A+BG^{-2/3}+(5/36)G^{-2} \tag{55}$$

и

$$N(G)=(N_0^2+M_0^2G^{-2/3})^{1/2}, \tag{56}$$

где A, B, N_0, M_0 — постоянные. Уравнение

$$d^2\Psi/dG^2+[A+BG^{-2/3}+(5/36)G^{-2}]\Psi=0 \tag{57}$$

имеет решения

$$\Psi_1 = (G+BA^{-1}G^{1/3})^{1/2} Z^{(1)}_{1/3}((A^{-2/3}B+A^{1/3}G^{2/3})^{3/2}),$$
$$\Psi_2 = (G+BA^{-1}G^{1/3})^{1/2} Z^{(2)}_{1/3}((A^{-2/3}B+A^{1/3}G^{2/3})^{3/2}), \quad (58)$$

где $Z^{(1)}_{1/3}$ и $Z^{(2)}_{1/3}$ — любые линейно независимые функции Бесселя порядка 1/3 с вронскианом, равным обратному аргументу. Легко убедиться, что условие (18) для Ψ_1 и Ψ_2 выполняется. Для Θ имеем, согласно формулам (31), (55) и (56), уравнение того же вида, что и (57):

$$d^2\Theta/dG^2+[A+k^2h^2N_0^2+(B+k^2h^2M_0^2)G^{-2/3}+(5/36)G^{-2}]\Theta=0. \quad (59)$$

Решение его есть

$$\Theta(G)=[G+(B+k^2h^2M_0^2)(A+k^2h^2N_0^2)^{-1}G^{1/3}]^{1/2}\times$$
$$\times Z_{1/3}([(A+k^2h^2N_0^2)^{-2/3}(B+k^2h^2M_0^2)+(A+k^2h^2N_0^2)^{1/3}G^{2/3}]^{3/2}). \quad (60)$$

Волновое уравнение, согласно формулам (38), (56) и (58), получается в виде

$$d^2U/dz^2+k^2(N_0^2+M_0^2G^{-2/3})(G+BA^{-1}G^{1/3})^2\times$$
$$\times Z^{(1)4}_{1/3}((A^{-2/3}B+A^{1/3}G^{2/3})^{3/2})U=0, \quad (61)$$

а решением его, согласно формулам (40), (58) и (60), является

$$U=(G+BA^{-1}G^{1/3})^{-1/2}[G+(B+k^2h^2M_0^2)(A+k^2h^2N_0^2)^{-1}G^{1/3}]^{1/2}\times$$
$$\times Z^{(1)-1}_{1/3}((A^{-2/3}B+A^{1/3}G^{2/3})^{3/2})\times$$
$$\times Z_{1/3}([(A+k^2h^2N_0^2)^{-2/3}(B+k^2h^2M_0^2)+(A+k^2h^2N_0^2)^{1/3}G^{2/3}]^{3/2}). \quad (62)$$

В этом примере исключение параметра тоже невозможно, но конечный результат упрощается подстановками

$$(A^{-2/3}B+A^{1/3}G^{2/3})^{3/2}\to G,$$
$$N_0^2A^{-1}\to A^2, \quad (63)$$
$$(M_0^2A-N_0^2B)A^{-5/3}\to B^2.$$

После соответствующих выкладок получим вместо (61) и (62) следующие формулы:

$$d^2U/dz^2+k^2(A^2G^2+B^2G^{4/3})Z^{(1)4}_{1/3}(G)U=0 \quad (64)$$

и

$$U=(1+k^2h^2A^2+k^2h^2B^2G^{-2/3})^{1/2}Z^{(1)-1}_{1/3}(G)\times$$
$$\times Z_{1/3}((1+k^2h^2A^2)^{-1}[(1+k^2h^2A^2)G^{2/3}+k^2h^2B^2]^{3/2}), \quad (65)$$

тогда как формула (37) примет вид

$$z/h=Z^{(2)}_{1/3}(G)/Z^{(1)}_{1/3}(G). \quad (66)$$

В частном случае $B=0$ получим отсюда формулы (52)—(54) с $\mu=0$,

$\nu = 1/3$. Отметим, что формулы (64)—(66) получаются также, если взять

$$q(G) = A + BG, \qquad N(G) = (N_0^2 + M_0^2 G)^{1/2} \tag{67}$$

и сделать в конце надлежащую замену параметра и постоянных.

III. В третьем примере откажемся от условия $f(y) = 0$ и положим

$$f(y) = -A^2 y^4, \tag{68}$$

$$q(G) = 1/4G^2 \tag{69}$$

и

$$N(G) = (N_0^2 G^{\mu-2} - BG^{-2})^{1/2}, \tag{70}$$

где A, B, N_0, μ — постоянные. Решения уравнения

$$d^2\Psi/dG^2 + (4G^2)^{-1}\Psi = 0 \tag{71}$$

выберем в виде

$$\Psi_1 = G^{1/2}, \qquad \Psi_2 = G^{1/2} \ln G. \tag{72}$$

Из формул (16) и (19) находим

$$z/h = K - C^{-1}y^{-1}(C - A^2y^2)^{1/2} \tag{73}$$

и

$$\ln G = A^{-1} \arcsin(Ay/C^{1/2}) + \ln H, \tag{74}$$

где K и H — постоянные. Исключая из этих формул y и выражая G, получаем

$$G = H \exp[A^{-1} \arctan(AC^{-1}(K - z/h)^{-1})]. \tag{75}$$

В уравнении (24) $-f(y)y^{-4} = A^2$; следовательно, оно имеет вид

$$d^2\Theta/dG^2 + [k^2h^2N_0^2 G^{\mu-2} - (Bk^2h^2 - A^2 - 1/4) G^{-2}]\Theta = 0 \tag{76}$$

и его решение есть

$$\Theta(G) = G^{1/2} Z_{2\mu^{-1}(Bk^2h^2 - A^2)^{1/2}}(2khN_0\mu^{-1}G^{\mu/2}), \tag{77}$$

где Z — функция Бесселя. Волновое уравнение (25), исключая с помощью формул (73) и (75) G и y, напишем в виде

$$d^2U/dz^2 + k^2[C(z/h - K)^2 + A^2/C]^{-2} \times$$
$$\times \{N_0^2 H^\mu \exp[\mu A^{-1} \arctan(AC^{-1}(K - z/h)^{-1})] - B\} U = 0. \tag{78}$$

Согласно формуле (26), его решение таково:

$$U(z) = [(z/h - K)^2 + A^2/C]^{1/2} Z_{2\mu^{-1}(Bk^2h^2 - A^2)^{1/2}}(2khN_0\mu^{-1}H^{\mu/2} \times$$
$$\times \exp[(\mu/2A) \arctan(AC^{-1}(K - z/h)^{-1})]). \tag{79}$$

В этом примере, как видим, параметр исключен. Но чтобы сделать конечные формулы более красивыми, введем новые постоянные. Пусть

$$
\begin{aligned}
&a=(CA^{-1}-C^2)^{1/2},\\
&b=-A-K(CA^{-1}-C^2)^{1/2},\\
&c=C,\\
&d=(1+bc)a^{-1}=(AC^{-1}-A^2)^{1/2}-CK,\\
&m=\mu/4A,\\
&S=B/A^2,\\
&p=2N_0H^{\mu/2}\mu^{-1}\exp(-(\mu/2A)\arccos((AC)^{1/2})).
\end{aligned}
\tag{80}
$$

Тогда волновое уравнение примет вид

$$
d^2U/dz^2+k^2[(a^2+c^2)z^2/h^2+2(ab+cd)z/h+(b^2+d^2)]^{-2}\times
$$
$$
\times\left\{4p^2m^2\exp\left(4m\arctan\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)-S\right\}U=0, \tag{81}
$$

а его решение —

$$
U(z)=[(a^2+c^2)z^2/h^2+2(ab+cd)z/h+(b^2+d^2)]^{1/2}\times
$$
$$
\times Z_{(2m)^{-1}(Sk^2h^2-1)^{1/2}}\left(khp\exp\left(2m\arctan\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)\right). \tag{82}
$$

Наконец, укажем на связь этого примера с приведенным в [3] (формулы (33) и (34)). Последний можно рассматривать как вариант данного, получающийся при комплексных значениях некоторых постоянных. Именно, положим

$$
\begin{aligned}
&a\to(a-c)(1-i)/2,\\
&b\to(b-d)(1-i)/2,\\
&c\to(a+c)(1+i)/2,\\
&d\to(b+d)(1+i)/2,\\
&m\to im,
\end{aligned}
\tag{83}
$$

где новые a, b, c, d, m вещественны, причем новые a, b, c, d удовлетворяют, как и старые, соотношению (30). Тогда

$$
\exp\left(4m\arctan\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)\to\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)^{2m} \tag{84}
$$

и

$$
(a^2+c^2)z^2/h^2+2(ab+cd)z/h+(b^2+d^2)\to 2i(az/h+b)(cz/h+d). \tag{85}
$$

Если, кроме того, сделаем $S\to-4S$, то получим волновое уравнение

$$
d^2U/dz^2+k^2(az/h+b)^{-2}(cz/h+d)^{-2}\left\{p^2m^2\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)^{2m}-S\right\}U=0, \tag{86}
$$

решение которого таково:

$$
U(z)=(az/h+b)^{1/2}(cz/h+d)^{1/2}Z_{(2m)^{-1}(1+4Sk^2h^2)^{1/2}}\left(khp\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)^{m}\right). \tag{87}
$$

Эти формулы совпадают с формулами (33) и (34) статьи [3].

Приведенными тремя примерами мы ограничимся. Вероятно, их можно найти и больше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л. М., Волны в слоистых средах., Изд. 2-е, М., «Наука», 1973.
2. Кард П., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **26**, № 3, 252—259 (1977).
3. Кард П., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **29**, № 1, 1—7 (1980).
4. Кард П., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **29**, № 2, 113—119 (1980).
5. Кард П., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **29**, № 3, 336—338 (1980).
6. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Изд. 2-е, М., ГИФМЛ, 1961.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 1/XII 1980

P. KARD

ÜHEST ÜHEMÕÕTMELISTE LAINEVÕRRANDITE LAHENDUSMEETODIST

Kui $\Psi_1(G)$ ja $\Psi_2(G)$ on võrrandi (13) lineaarselt sõltumatud lahendid, mille vronskiaan võrdub ühega, ja kui $\Theta(G)$ rahuldab võrrandit (24), siis avaldub ühemõõtmelise lainevõrrandi (25) lahend valemiga (26). Selles võrrandis on z koordinaat, k lainearv, G ja y parameetrid. Parameetrite vahel kehtib seos (19), koordinaadi sõltuvuse nendest määrab valem (16). Funktsioonide $f(y)$, $q(G)$ ja $N(G)$ valik on meelevaldne, kuid võrrandite (13) ja (24) lahendid peavad olema tuntud. Erijuhul $f(y)=0$ on lainevõrrandil kuju (38) ja tema lahend on (40), kusjuures $\Theta(G)$ rahuldab võrrandit (31) ning seose z ja G vahel annab valem (37). Konkreetsed näited on toodud valemites (52)—(54), (64)—(66) ja (81)—(82), kus Z tähendab Besseli funktsiooni.

P. KARD

A METHOD FOR SOLVING ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATIONS

If $\Psi_1(G)$ and $\Psi_2(G)$ are the linearly independent solutions of the equation (13) with the Wronskian equal to unity, and if $\Theta(G)$ satisfies the equation (24), then the solution of the one-dimensional wave equation (25) is of the form (26). In this equation z is the co-ordinate, k the wave number, G and y parameters. The parameters are connected by the formula (19), and the co-ordinate depends on them via formula (16). The functions $f(y)$, $q(G)$, and $N(G)$ can be chosen arbitrarily, but the equations (13) and (24) must have solutions in terms of the known functions. When $f(y)=0$, the wave equation turns to (38) and its solution to (40), whereas $\Theta(G)$ satisfies the equation (31) and the co-ordinate is connected with the parameter via the formula (37). As examples, three equations with their solutions are established (formulae (52)—(54), (64)—(66), and (81)—(82), where Z denotes Bessel functions).