

П. КАРД

УДК 535.41 : 517.94

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Введение

Одномерное волновое уравнение

$$d^2U/dz^2 + k^2 n^2(z) U = 0, \quad (1)$$

где U — амплитуда монохроматической волны и $n(z)$ — зависящий от координаты z , но не зависящий от волнового числа k показатель преломления, имеет решение в замкнутом виде только для некоторых форм зависимости $n(z)$. Многие из этих решений давно известны и хорошо изучены (см., напр., [1]). В статьях [2–5] были приведены новые случаи волновых уравнений, решаемых в замкнутом виде. В настоящей статье мы изложим другую, более общую методику нахождения подобных уравнений и их решений, причем будут обнаружены новые примеры.

Метод

Излагаемый ниже метод является частной реализацией (в применении к одномерным волновым уравнениям) общего преобразования, связывающего решения двух линейных дифференциальных уравнений второго порядка (см. [6], с. 151). Насколько нам известно, до работ [2–5] этот метод в теории волновых уравнений не применялся.

Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$U(z) = F(z) \Theta(G(z)), \quad (2)$$

где $\Theta(G)$ удовлетворяет уравнению

$$d^2\Theta/dG^2 + p(G)\Theta = 0 \quad (3)$$

с некоторой, пока неконкретизируемой функцией $p(G)$. Подставляя решение (2) в уравнение (1), с учетом (3) находим

$$(2F'G' + FG'')\Theta' + (F'' - FG'^2p + k^2n^2F)\Theta = 0, \quad (4)$$

где штрих у G и F означает производную по z , а у Θ по G . Так как Θ определяется уравнением (3), то удовлетворить независимому уравнению (4) возможно только приравняв коэффициенты нулю. Итак,

$$2F'G' + FG'' = 0 \quad (5)$$

и



$$-FG'^2p + F'' + k^2n^2F = 0. \quad (6)$$

Интегрируя первое из этих уравнений, находим

$$F = G'^{-1/2}. \quad (7)$$

Подставляя это выражение во второе уравнение, получаем

$$k^2n^2 = G'''/2G' - 3G''^2/4G'^2 + p(G)G'^2. \quad (8)$$

Далее положим

$$G' \equiv dG/dz = h^{-1}y^2(z)\Psi_1^2(G), \quad (9)$$

где $y(z)$ и $\Psi_1(G)$ — две новые функции, а h — постоянная размерности длины, означающая в конкретных задачах обычно толщину слоя. Отсюда находим производные G'' и G''' в виде:

$$G'' = 2h^{-2}y^4\Psi_1^3\Psi_1' + 2h^{-1}yy'\Psi_1^2 \quad (10)$$

и

$$G''' = 6h^{-3}y^6\Psi_1^4\Psi_1'^2 + 2h^{-3}y^6\Psi_1^5\Psi_1'' + 12h^{-2}y^3y'\Psi_1^3\Psi_1' + \\ + 2h^{-1}yy''\Psi_1^2 + 2h^{-1}y'^2\Psi_1^2, \quad (11)$$

где штрих у y означает производную по z , а у Ψ_1 по G . Подставляя эти выражения в уравнение (8), находим

$$k^2n^2 = y''/y - 2y'^2/y^2 + G'^2(\Psi_1''/\Psi_1 + p). \quad (12)$$

Далее введем еще две новые функции, пока произвольные, $f(y)$ и $q(G)$ и потребуем выполнения следующих уравнений:

$$d^2\Psi_1/dG^2 + q(G)\Psi_1 = 0 \quad (13)$$

и

$$y''/y - 2y'^2/y^2 = f(y)/h^2. \quad (14)$$

Тогда соотношение (12) примет вид

$$k^2n^2 = f(y)/h^2 + G'^2(p(G) - q(G)). \quad (15)$$

Общее решение уравнения (14) таково:

$$z/h = \int y^{-2} [C + 2 \int y^{-3} f(y) dy]^{-1/2} dy, \quad (16)$$

где C — постоянная интегрирования. Интегрируя с учетом (13) уравнение (9), находим

$$\Psi_2(G)/\Psi_1(G) = h^{-1} \int y^2(z) dz, \quad (17)$$

где Ψ_2 — линейно независимое от Ψ_1 решение уравнения (13), причем оба нормированы так, что вронскиан равен единице:

$$\Psi_1\Psi_2' - \Psi_1'\Psi_2 = 1. \quad (18)$$

Из формул (16) и (17) следует также

$$\Psi_2(G)/\Psi_1(G) = \int [C + 2 \int y^{-3} f(y) dy]^{-1/2} dy. \quad (19)$$

Обратимся теперь к уравнению (15). Так как n зависит от z , но не зависит от k , а z вместе с y зависит, согласно формуле (19), от G ,

то ни y , ни G не могут зависеть от k . В силу уравнений (13) и (14) $f(y)$ и $q(G)$ тоже не могут зависеть от k . Следовательно, единственной функцией, могущей дать множитель k^2 в левую часть уравнения (15), является $p(G)$. Согласно сказанному положим

$$p(G) = q(G) + k^2 h^2 N^2(G) - h^{-2} f(y) G'^{-2}, \quad (20)$$

где $N(G)$ — еще одна функция, не зависящая от k . Иначе, в силу формулы (9) можно написать:

$$p(G) = q(G) + k^2 h^2 N^2(G) - f(y) y^{-4} \Psi_1^{-4}. \quad (21)$$

Из формулы (15) теперь следует

$$n = h N(G) dG/dz \quad (22)$$

или, опять в силу (9),

$$n = N(G) \Psi_1^2(G) y^2. \quad (23)$$

Наконец, уравнение (3) получает вид

$$d^2 \Theta / dG^2 + [q(G) + k^2 h^2 N^2(G) - f(y) y^{-4} \Psi_1^{-4}] \Theta = 0. \quad (24)$$

Итак, мы пришли к следующему результату. Заданы три функции — $q(G)$, $N(G)$ и $f(y)$. Первую из них следует выбирать так, чтобы уравнение (13) решалось в замкнутом виде, а две остальные — так, чтобы в замкнутом виде решалось уравнение (24). При этом связь между G и y осуществляется формулой (19). Тогда волновое уравнение

$$d^2 U / dz^2 + k^2 N^2(G) \Psi_1^4 y^4 U = 0 \quad (25)$$

имеет замкнутое решение (см. формулы (2), (7) и (9))

$$U = y^{-1} \Psi_1^{-1} \Theta. \quad (26)$$

Заметим, что это решение получается в параметрическом виде, т. е. U получается как функция параметра G , а не координаты z . Показатель преломления (формула (23)) тоже задан как функция G . Следовательно, мы должны еще знать зависимость между G и z . Для этого имеем формулу (16), определяющую z как функцию y . А так как y уже выражено (по формуле (19)) в зависимости от G , то мы получаем и z как функцию G .

Исключение параметра возможно далеко не всегда, но если исключение невозможно, то часто бывает полезно произвести замену параметра с целью упрощения конечных формул.

Прежде чем перейти к примерам, отметим важный частный вариант, где

$$f(y) = 0. \quad (27)$$

Интегралы в формулах (16) и (19) тогда легко вычисляются до конца, и мы получаем (заменив $C = c^2$):

$$y(z) = (cz/h + d)^{-1} \quad (28)$$

и

$$\Psi_2 / \Psi_1 = (az/h + b) (cz/h + d)^{-1}, \quad (29)$$

где a , b , c , d — постоянные интегрирования, связанные, в силу формулы (18), соотношением

$$ad - bc = 1. \quad (30)$$

Уравнение (13) в этом варианте остается неизменным, а уравнения (24) и (25) и формулы (23) и (26) принимают вид

$$d^2\Theta/dG^2 + [q(G) + k^2h^2N^2(G)]\Theta = 0, \quad (31)$$

$$d^2U/dz^2 + k^2N^2(G)\Psi_1^4(cz/h+d)^{-4}U = 0, \quad (32)$$

$$n = N(G)\Psi_1^2(G)(cz/h+d)^{-2} \quad (33)$$

и

$$U = (cz/h+d)\Psi_1^{-1}\Theta. \quad (34)$$

Последний результат является обобщением полученного в [2]. В самом деле, положив в уравнениях (13) и (31) $q(G) = f(u)$, $N(G) = h^{-1}$, $\Psi = s$ и $\Theta = A$, мы получим соответствующие уравнения (6) и (9) статьи [2]. Формулы (29) и (32) — (34) можно несколько упростить. Поскольку из формулы (29), с учетом (30) вытекает

$$\Psi_1(G)(cz/h+d)^{-1} = a\Psi_1 - c\Psi_2, \quad (35)$$

то целесообразно переобозначить Ψ_1 и Ψ_2 согласно следующим линейным комбинациям

$$a\Psi_1 - c\Psi_2 \rightarrow \Psi_1, \quad (36)$$

$$-b\Psi_1 + d\Psi_2 \rightarrow \Psi_2,$$

причем вронскиан для новых Ψ_1 и Ψ_2 по-прежнему равен единице. Тогда получим вместо формул (29) и (32) — (34) следующие более простые формулы

$$\Psi_2/\Psi_1 = z/h, \quad (37)$$

$$d^2U/dz^2 + k^2N^2(G)\Psi_1^4(G)U = 0, \quad (38)$$

$$n = N(G)\Psi_1^2(G) \quad (39)$$

и

$$U = \Psi_1^{-1}\Theta. \quad (40)$$

Примеры

Изложенный выше метод способен дать все или почти все полученные ранее в [2-5] результаты. Здесь мы приведем новые примеры.

1. В первом примере примем

$$f(y) = 0, \quad (41)$$

$$q(G) = A^2 - (v^2 - 1/4)G^{-2} \quad (42)$$

и

$$N(G) = (N_0^2 + \mu^2 G^{-2})^{1/2}, \quad (43)$$

где A , N_0 , μ , v — постоянные. Решения уравнения

$$d^2\Psi/dG^2 + [A^2 - (\nu^2 - 1/4)G^{-2}]\Psi = 0, \quad (44)$$

удовлетворяющие условию (18), суть

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= G^{1/2} Z_{\nu}^{(1)}(AG), \\ \Psi_2 &= G^{1/2} Z_{\nu}^{(2)}(AG), \end{aligned} \quad (45)$$

где $Z_{\nu}^{(1)}$ и $Z_{\nu}^{(2)}$ — произвольные, линейно независимые функции Бесселя ν -го порядка с вронскианом, равным $(AG)^{-1}$. Для Θ имеем уравнение

$$d^2\Theta/dG^2 + [A^2 + k^2 h^2 N_0^2 - (\nu^2 - k^2 h^2 \mu^2 - 1/4)G^{-2}]\Theta = 0, \quad (46)$$

решение которого есть

$$\Theta = G^{1/2} Z_{(\nu^2 - k^2 h^2 \mu^2)^{1/2}}((A^2 + k^2 h^2 N_0^2)^{1/2} G). \quad (47)$$

Следовательно, согласно формулам (38) и (40), волновое уравнение

$$d^2U/dz^2 + k^2(N_0^2 G^2 + \mu^2)Z_{\nu}^{(1)4}(AG)U = 0 \quad (48)$$

имеет решение

$$U = Z_{\nu}^{(1)-1}(AG) Z_{(\nu^2 - k^2 h^2 \mu^2)^{1/2}}((A^2 + k^2 h^2 N_0^2)^{1/2} G), \quad (49)$$

причем параметр G связан с координатой z соотношением

$$z/h = Z_{\nu}^{(2)}(AG)/Z_{\nu}^{(1)}(AG) \quad (50)$$

(см. формулу (37)).

В этом примере исключение параметра невозможно, но некоторое упрощение достигается заменой

$$AG \rightarrow G, \quad N_0 \rightarrow A^2. \quad (51)$$

Тогда формулы (48) — (50) примут вид:

$$d^2U/dz^2 + k^2(A^2 G^2 + \mu^2)Z_{\nu}^{(1)4}(G)U = 0, \quad (52)$$

$$U = Z_{\nu}^{(1)-1}(G) Z_{(\nu^2 - k^2 h^2 \mu^2)^{1/2}}(G(1 + k^2 h^2 A^2)^{1/2}) \quad (53)$$

и

$$z/h = Z_{\nu}^{(2)}(G)/Z_{\nu}^{(1)}(G). \quad (54)$$

Этот результат является обобщением примера, приведенного в [2], и сводится к тому при $\mu = 0$. Он обобщает также основной результат статьи [4], для получения которого следует взять $A = 0$.

II. Для второго примера оставим в силе (41) и выберем

$$q(G) = A + BG^{-2/3} + (5/36)G^{-2} \quad (55)$$

и

$$N(G) = (N_0^2 + M_0^2 G^{-2/3})^{1/2}, \quad (56)$$

где A, B, N_0, M_0 — постоянные. Уравнение

$$d^2\Psi/dG^2 + [A + BG^{-2/3} + (5/36)G^{-2}]\Psi = 0 \quad (57)$$

имеет решения

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= (G + BA^{-1}G^{1/3})^{1/2} Z_{1/3}^{(1)} ((A^{-2/3}B + A^{1/3}G^{2/3})^{3/2}), \\ \Psi_2 &= (G + BA^{-1}G^{1/3})^{1/2} Z_{1/3}^{(2)} ((A^{-2/3}B + A^{1/3}G^{2/3})^{3/2}),\end{aligned}\quad (58)$$

где $Z_{1/3}^{(1)}$ и $Z_{1/3}^{(2)}$ — любые линейно независимые функции Бесселя порядка $1/3$ с вронскианом, равным обратному аргументу. Легко убедиться, что условие (18) для Ψ_1 и Ψ_2 выполняется. Для Θ имеем, согласно формулам (31), (55) и (56), уравнение того же вида, что и (57):

$$d^2\Theta/dG^2 + [A + k^2h^2N_0^2 + (B + k^2h^2M_0^2)G^{-2/3} + (5/36)G^{-2}]\Theta = 0. \quad (59)$$

Решение его есть

$$\begin{aligned}\Theta(G) &= [G + (B + k^2h^2M_0^2)(A + k^2h^2N_0^2)^{-1}G^{1/3}]^{1/2} \times \\ &\times Z_{1/3}([(A + k^2h^2N_0^2)^{-2/3}(B + k^2h^2M_0^2) + (A + k^2h^2N_0^2)^{1/3}G^{2/3}]^{3/2}).\end{aligned}\quad (60)$$

Волновое уравнение, согласно формулам (38), (56) и (58), получается в виде

$$\begin{aligned}d^2U/dz^2 + k^2(N_0^2 + M_0^2G^{-2/3})(G + BA^{-1}G^{1/3})^2 \times \\ \times Z_{1/3}^{(1)}((A^{-2/3}B + A^{1/3}G^{2/3})^{3/2})U = 0,\end{aligned}\quad (61)$$

а решением его, согласно формулам (40), (58) и (60), является

$$\begin{aligned}U &= (G + BA^{-1}G^{1/3})^{-1/2} [G + (B + k^2h^2M_0^2)(A + k^2h^2N_0^2)^{-1}G^{1/3}]^{1/2} \times \\ &\times Z_{1/3}^{(1)}((A^{-2/3}B + A^{1/3}G^{2/3})^{3/2}) \times \\ &\times Z_{1/3}([(A + k^2h^2N_0^2)^{-2/3}(B + k^2h^2M_0^2) + (A + k^2h^2N_0^2)^{1/3}G^{2/3}]^{3/2}).\end{aligned}\quad (62)$$

В этом примере исключение параметра тоже невозможно, но конечный результат упрощается подстановками

$$\begin{aligned}(A^{-2/3}B + A^{1/3}G^{2/3})^{3/2} &\rightarrow G, \\ N_0^2A^{-1} &\rightarrow A^2, \\ (M_0^2A - N_0^2B)A^{-5/3} &\rightarrow B^2.\end{aligned}\quad (63)$$

После соответствующих выкладок получим вместо (61) и (62) следующие формулы:

$$d^2U/dz^2 + k^2(A^2G^2 + B^2G^{4/3})Z_{1/3}^{(1)}(G)U = 0 \quad (64)$$

и

$$\begin{aligned}U &= (1 + k^2h^2A^2 + k^2h^2B^2G^{-2/3})^{1/2} Z_{1/3}^{(1)}(G) \times \\ &\times Z_{1/3}((1 + k^2h^2A^2)^{-1}[(1 + k^2h^2A^2)G^{2/3} + k^2h^2B^2]^{3/2}),\end{aligned}\quad (65)$$

тогда как формула (37) примет вид

$$z/h = Z_{1/3}^{(2)}(G)/Z_{1/3}^{(1)}(G). \quad (66)$$

В частном случае $B = 0$ получим отсюда формулы (52) — (54) с $\mu = 0$,

$v = 1/3$. Отметим, что формулы (64) — (66) получаются также, если взять

$$q(G) = A + BG, \quad (67)$$

$$N(G) = (N_0^2 + M_0^2 G)^{1/2}$$

и сделать в конце надлежащую замену параметра и постоянных.

III. В третьем примере откажемся от условия $f(y) = 0$ и положим

$$f(y) = -A^2 y^4, \quad (68)$$

$$q(G) = 1/4 G^2 \quad (69)$$

и

$$N(G) = (N_0^2 G^{\mu-2} - BG^{-2})^{1/2}, \quad (70)$$

где A, B, N_0, μ — постоянные. Решения уравнения

$$d^2\Psi/dG^2 + (4G^2)^{-1}\Psi = 0 \quad (71)$$

выберем в виде

$$\Psi_1 = G^{1/2}, \quad (72)$$

$$\Psi_2 = G^{1/2} \ln G.$$

Из формул (16) и (19) находим

$$z/h = K - C^{-1}y^{-1}(C - A^2y^2)^{1/2} \quad (73)$$

и

$$\ln G = A^{-1} \arcsin(Ay/C^{1/2}) + \ln H, \quad (74)$$

где K и H — постоянные. Исключая из этих формул y и выражая G , получаем

$$G = H \exp[A^{-1} \arctan(AC^{-1}(K - z/h)^{-1})]. \quad (75)$$

В уравнении (24) $-f(y)y^{-4} = A^2$; следовательно, оно имеет вид

$$d^2\Theta/dG^2 + [k^2h^2N_0^2 G^{\mu-2} - (Bk^2h^2 - A^2 - 1/4)G^{-2}]\Theta = 0 \quad (76)$$

и его решение есть

$$\Theta(G) = G^{1/2} Z_{2\mu^{-1}(Bk^2h^2 - A^2)^{1/2}}(2khN_0\mu^{-1}G^{\mu/2}), \quad (77)$$

где Z — функция Бесселя. Волновое уравнение (25), исключая с помощью формул (73) и (75) G и y , напомним в виде

$$d^2U/dz^2 + k^2[C(z/h - K)^2 + A^2/C]^{-2} \times \\ \times \{N_0^2 H^\mu \exp[\mu A^{-1} \arctan(AC^{-1}(K - z/h)^{-1})] - B\} U = 0. \quad (78)$$

Согласно формуле (26), его решение таково:

$$U(z) = [(z/h - K)^2 + A^2/C]^{1/2} Z_{2\mu^{-1}(Bk^2h^2 - A^2)^{1/2}}(2khN_0\mu^{-1}H^{\mu/2} \times \\ \times \exp[(\mu/2A) \arctan(AC^{-1}(K - z/h)^{-1})]). \quad (79)$$

В этом примере, как видим, параметр исключен. Но чтобы сделать конечные формулы более красивыми, введем новые постоянные. Пусть

$$\begin{aligned}
a &= (CA^{-1} - C^2)^{1/2}, \\
b &= -A - K(CA^{-1} - C^2)^{1/2}, \\
c &= C, \\
d &= (1 + bc)a^{-1} = (AC^{-1} - A^2)^{1/2} - CK, \\
m &= \mu/4A, \\
S &= B/A^2, \\
p &= 2N_0 H^{1/2} \mu^{-1} \exp(-(\mu/2A) \arccos((AC)^{1/2})).
\end{aligned} \tag{80}$$

Тогда волновое уравнение примет вид

$$\begin{aligned}
& d^2 U/dz^2 + k^2 [(a^2 + c^2) z^2/h^2 + 2(ab + cd)z/h + (b^2 + d^2)]^{-2} \times \\
& \times \left\{ 4p^2 m^2 \exp\left(4m \arctan \frac{az/h + b}{cz/h + d}\right) - S \right\} U = 0,
\end{aligned} \tag{81}$$

а его решение —

$$\begin{aligned}
U(z) &= [(a^2 + c^2) z^2/h^2 + 2(ab + cd)z/h + (b^2 + d^2)]^{1/2} \times \\
& \times Z_{(2m)-1(Sk^2h^2-1)^{1/2}} \left(khp \exp\left(2m \arctan \frac{az/h + b}{cz/h + d}\right) \right).
\end{aligned} \tag{82}$$

Наконец, укажем на связь этого примера с приведенным в [3] (формулы (33) и (34)). Последний можно рассматривать как вариант данного, получающийся при комплексных значениях некоторых постоянных. Именно, положим

$$\begin{aligned}
a &\rightarrow (a - c)(1 - i)/2, \\
b &\rightarrow (b - d)(1 - i)/2, \\
c &\rightarrow (a + c)(1 + i)/2, \\
d &\rightarrow (b + d)(1 + i)/2, \\
m &\rightarrow im,
\end{aligned} \tag{83}$$

где новые a, b, c, d, m вещественны, причем новые a, b, c, d удовлетворяют, как и старые, соотношению (30). Тогда

$$\exp\left(4m \arctan \frac{az/h + b}{cz/h + d}\right) \rightarrow \left(\frac{az/h + b}{cz/h + d}\right)^{2m} \tag{84}$$

и

$$(a^2 + c^2) z^2/h^2 + 2(ab + cd)z/h + (b^2 + d^2) \rightarrow 2i(az/h + b)(cz/h + d). \tag{85}$$

Если, кроме того, сделаем $S \rightarrow -4S$, то получим волновое уравнение

$$d^2 U/dz^2 + k^2 (az/h + b)^{-2} (cz/h + d)^{-2} \left\{ p^2 m^2 \left(\frac{az/h + b}{cz/h + d}\right)^{2m} - S \right\} U = 0, \tag{86}$$

решение которого таково:

$$U(z) = (az/h + b)^{1/2} (cz/h + d)^{1/2} Z_{(2m)-1(1+4Sk^2h^2)^{1/2}} \left(khp \left(\frac{az/h + b}{cz/h + d}\right)^m \right). \tag{87}$$

Эти формулы совпадают с формулами (33) и (34) статьи [3].

Приведенными тремя примерами мы ограничимся. Вероятно, их можно найти и больше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л. М., Волны в слоистых средах., Изд. 2-е, М., «Наука», 1973.
2. Кард П., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 26, № 3, 252—259 (1977).
3. Кард П., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 29, № 1, 1—7 (1980).
4. Кард П., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 29, № 2, 113—119 (1980).
5. Кард П., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 29, № 3, 336—338 (1980).
6. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Изд. 2-е, М., ГИФМЛ, 1961.

Тартуский государственный
университет

Поступила в редакцию
1/XII 1980

P. KARD

ÜHEST ÜHEMOOTMELISTE LAINEVÖRRANDITE LAHENDUSMEETODIST

Kui $\Psi_1(G)$ ja $\Psi_2(G)$ on võrrandi (13) lineaarselt sõltumatud lahendid, mille vronskiaan võrdub ühega, ja kui $\Theta(G)$ rahuldab võrrandit (24), siis avaldub ühemootmelise laine-võrrandi (25) lahend valemiga (26). Selles võrrandis on z koordinaat, k lainearv, G ja y parameetrid. Parameetrite vahel kehtib seos (19), koordinaadi sõltuvuse nendest määrab valem (16). Funktsioonide $f(y)$, $q(G)$ ja $N(G)$ valik on meelevaldne, kuid võrrandite (13) ja (24) lahendid peavad olema tuntud. Erijuhul $f(y)=0$ on laine-võrrandil kuu (38) ja tema lahend on (40), kusjuures $\Theta(G)$ rahuldab võrrandit (31) ning seose z ja G vahel annab valem (37). Konkreetsed näited on toodud valemities (52)—(54), (64)—(66) ja (81)—(82), kus Z tähendab Besseli funktsiooni.

P. KARD

A METHOD FOR SOLVING ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATIONS

If $\Psi_1(G)$ and $\Psi_2(G)$ are the linearly independent solutions of the equation (13) with the Wronskian equal to unity, and if $\Theta(G)$ satisfies the equation (24), then the solution of the one-dimensional wave equation (25) is of the form (26). In this equation z is the co-ordinate, k the wave number, G and y parameters. The parameters are connected by the formula (19), and the co-ordinate depends on them via formula (16). The functions $f(y)$, $q(G)$, and $N(G)$ can be chosen arbitrarily, but the equations (13) and (24) must have solutions in terms of the known functions. When $f(y)=0$, the wave equation turns to (38) and its solution to (40), whereas $\Theta(G)$ satisfies the equation (31) and the co-ordinate is connected with the parameter via the formula (37). As examples, three equations with their solutions are established (formulae (52)—(54), (64)—(66), and (81)—(82), where Z denotes Bessel functions).