EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 30. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1981, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 30
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1981, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1981.2.09

УДК 517.948

А. РООЗЕ

К ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ*

A. ROOSE. PARALLEELMEETOD MITTELINEAARSETE VÕRRANDISÜSTEEMIDE LAHENDAMISEKS

A. ROOSE. A PARALLEL METHOD FOR SOLVING NONLINEAR EQUATIONS

(Представил А. Хумал)

1. Рассмотрим решение системы нелинейных уравнений

$$x=\psi(x), \tag{1}$$

где $\psi: D\subset R^q\to R^q$, на мультипроцессорной ЭВМ.

Для решения системы (1) пригодны либо численные методы, разработанные до эры мультипроцессорных ЭВМ, но обладающие естественным параллелизмом (например метод простой итерации), либо методы, которые с самого начала нацелены на применение параллельных вычислительных устройств [1]. В настоящей работе предлагается прием, который позволяет, пользуясь методом простой итерации, загружать процессоры, число которых превышает размерность системы уравнений (1).

2. Запишем систему нелинейных уравнений не в традиционном виде (1), а в форме

$$x=\Phi(l(x),x), \tag{2}$$

где $\Phi(l(x),x)\equiv\psi(x)$, $\Phi: R^m\times R^q\to R^q$, $l: R^q\to R^m$, причем вектор $l(x)$ подберем исходя из структуры системы уравнений. Ясно, что при подборе вектора $l(x)$ вычислитель имеет здесь большую свободу.

Далее выпишем т. н. расширенную систему уравнений

$$\begin{aligned} x&=\Phi(y,x),\\ y&=l(x), \end{aligned} \tag{3}$$

которая эквивалентна системе (2) в том смысле, что каждое решение уравнения (2) удовлетворяет системе (3) и, наоборот, каждое решение системы (3) удовлетворяет уравнению (2). Применив к системе уравне-

* Результаты работы доложены на Всесоюзном научно-техническом совещании «Проблемы создания и использования высокопроизводительных информационно-вычислительных машин», Кишинев, 9—11 октября 1979 г.

ний (3) метод простой итерации, получим т. н. распараллеленный метод простой итерации

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= \Phi(y^n, x^n), \\ y^{n+1} &= l(x^n), \quad n=0,\ 1,\ \ldots, \end{aligned} \tag{4}$$

где x^0, y^0 — начальные приближения. Ясно, что итерационный процесс (4) имеет бо́льшую степень параллельности, нежели аналогичный процесс, построенный непосредственно для уравнения (2). Если же метод простой итерации применить непосредственно к системе (2), то получим последовательно-параллельный процесс

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= \Phi(y^n, x^n), \\ y^n &= l(x^n), \quad n=0,\ 1,\ \ldots, \end{aligned} \tag{5}$$

где x^0 — начальное приближение. Видно, что запись итерационного процесса (5) является лишь видоизмененной записью метода простой итерации для решения системы (2) и поэтому выбор вектора $l(x)$, в принципе, никак не влияет на свойства сходимости этого процесса.

Недостатком итерационного процесса (4) является то обстоятельство, что начальные приближения надо задавать и по переменной y, что обычно неудобно. Поэтому на практике целесообразно модифицировать процесс (4), проводя вычисления по алгоритму

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= \Phi(y^n, x^n), \\ y^{n+1} &= l(x^n), \quad n=1,\ 2,\ \ldots, \end{aligned} \tag{6}$$

где $y^1 = l(x^0)$, а x^0, x^1 — начальные приближения. Приводимая ниже теорема определяет условия сходимости процесса (6). Важно отметить, что эти условия зависят от выбора вектора $l(x)$.

Теорема. *Пусть последовательность* $\{x^n\}_0^\infty$ *определяется по алгоритму* (6), *где* $\Phi: D_y \times D_x \subset R^m \times R^q \to R^q$, $l: D_x \subset R^q \to R^m$, *и на прямом произведении* $D_y^0 \times D_x^0$, *где* $D_y^0 \subset D_y$, $D_x^0 \subset D_x$ (D_x^0 — *замкнутое множество,* $l: D_x^0 \to D_y^0$), *выполняются условия:*

1) $\{x^n\}_0^\infty \subset D_x^0$;

2) $\|\Phi(y,x) - \Phi(y,w)\| \leqslant A\|x-w\|$;

3) $\|\Phi(z,x) - \Phi(y,x)\| \leqslant N\|z-y\|$;

4) $\|l(x) - l(w)\| \leqslant K\|x-w\|$;

5) $A+NK<1$.

Тогда последовательность $\{x^n\}_0^\infty$ *сходится,* $\lim_{n\to\infty} x^n = x^*$, *где* x^* *есть единственное решение уравнения* $x = \Phi(l(x), x)$, *на множестве* D_x^0. *Существуют константы* γ_1, γ_2, *при которых справедливы оценки*

$$\|x^* - x^n\| \leqslant \gamma_1 t_1^n/(1-t_1) + \gamma_2 t_2^n/(1-t_2), \quad n=0,\ 1,\ \ldots, \tag{7}$$

где t_1 *и* t_2 *наибольший и наименьший корни уравнения* $t^2 - At - NK = 0$ *соответственно.*

Доказательство. Процесс (6) можно представить в виде двухшагового итерационного процесса

$$x^{n+1}=\Phi(l(x^{n-1}),x^n),\qquad n=1,\,2,\,\ldots\,.$$

Последовательность $s_n=\|x^{n+1}-x^n\|$, $n=0,1,\ldots$ определена согласно предположениям теоремы. Поэтому в условиях теоремы можно писать

$$\|x^{n+2}-x^{n+1}\|=\|\Phi(l(x^n),x^{n+1})-\Phi(l(x^{n-1}),x^{n+1})+\Phi(l(x^{n-1}),x^{n+1})-$$
$$-\Phi(l(x^{n-1}),x^n)\|\leqslant\|\Phi(l(x^{n-1}),x^{n+1})-\Phi(l(x^{n-1}),x^n)\|+$$
$$+\|\Phi(l(x^n),x^{n+1})-\Phi(l(x^{n-1}),x^{n+1})\|\leqslant A\|x^{n+1}-x^n\|+NK\|x^n-x^{n-1}\|,$$

т. е. $s_{n+1}\leqslant As_n+NKs_{n-1}$, $n=1,\,2,\,\ldots$. Нетрудно проверить, что $\delta_n=\gamma_1t_1{}^n+\gamma_2t_2{}^n$ есть общее решение разностного уравнения $\delta_{n+1}=A\delta_n+NK\delta_{n-1}$, где t_1, t_2 определены в теореме, причем легко проверить, что $-1<t_2<0<t_1<1$.

Определим константы γ_1, γ_2 из условий

$$\delta_0=\gamma_1+\gamma_2=s_0,$$
$$\delta_1=\gamma_1t_1+\gamma_2t_2=s_1,$$

и убедимся, что тогда

$$s_n\leqslant\delta_n,\qquad n=0,\,1,\,\ldots\,. \tag{8}$$

Действительно, если свойство (8) справедливо до некоторого $n\geqslant1$, то

$$s_{n+1}\leqslant As_n+NKs_{n-1}\leqslant A\delta_n+NK\delta_{n-1}=\delta_{n+1}.$$

Теперь можно писать

$$\|x^{n+p}-x^n\|\leqslant\sum_{j=n}^{n+p-1}\|x^{j+1}-x^j\|\leqslant\sum_{j=n}^{n+p-1}(\gamma_1t_1^j+\gamma_2t_2^j)=$$
$$=\gamma_1t_1^n(1-t_1^p)/(1-t_1)+\gamma_2t_2^n(1-t_2^p)/(1-t_2),\qquad n\geqslant0,\ p>0. \tag{9}$$

Тем самым видно, что последовательность (9) фундаментальна и, следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=x^*\in D_x{}^0$. Из непрерывности $\Phi(y,x)$ и $l(x)$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi(l(x^{n-1}),x^n)=\Phi(l(x^*),x^*)=x^*$, т. е. x^* есть решение уравнения $\Phi(l(x),x)=x$.

Для доказательства единственности решения предположим, что существует и второе решение $z^*\in D_x{}^0$, $z^*\neq x^*$. Тогда

$$\|x^*-z^*\|\leqslant\|\Phi(l(x^*),x^*)-\Phi(l(x^*),z^*)\|+$$
$$+\|\Phi(l(x^*),z^*)-\Phi(l(z^*),z^*)\|\leqslant A\|x^*-z^*\|+NK\|x^*-z^*\|<\|x^*-z^*\|.$$

Это противоречие доказывает единственность x^*. Наконец, из выражения (9) при $p\to\infty$ получаем оценки (7).

Замечание. Доказательство теоремы следует методике Х. Вайничке [2] (см. также [3], теорема 12.1.8).

3. Пример. Исходная система уравнений [4]:

$$16(x_2-2x_1)+16(1-x_1)x_2/7+1/(x_1+1)^2-4/7=0,$$
$$16(x_3-2x_2+x_1)+8(1-x_2)(x_3-x_1)^2/3+1/(x_2+1)^2-2/3=0,$$
$$16(1-2x_3+x_2)+16(1-x_3)(1-x_2)^2/5+1/(x_3+1)^2-4/5=0.$$

Приближенное решение системы $x_1 = 0{,}2704$, $x_2 = 0{,}5106$, $x_3 = 0{,}7466$. Расширенная система уравнений, при которой метод простой итерации (4) и двухшаговый метод (6) определяют сходящиеся к решению последовательности приближений:

$$x_1 = (112x_2 + 16y_{11} + 7y_{12} - 4)/(224 + 16y_{11}),$$

$$x_2 = (48(x_3 + x_1) + 8y_{21} + 3y_{22} - 2)/(96 + 8y_{21}),$$

$$x_3 = (80(1 + x_2) + 16y_{31} + 5y_{32} - 4)/(160 + 16y_{31}),$$

$$y_{11} = x_2^2,$$

$$y_{12} = 1/(x_1 + 1)^2,$$

$$y_{21} = (x_3 - x_1)^2,$$

$$y_{22} = 1/(x_2 + 1)^2,$$

$$y_{31} = (1 - x_2)^2,$$

$$y_{32} = 1/(x_3 + 1)^2.$$

Использованные начальные приближения при методе простой итерации:

$\overset{0}{x}_1 = 0{,}2$; $\overset{0}{x}_2 = 0{,}4$; $\overset{0}{x}_3 = 0{,}7$; $\overset{0}{y}_{11} = 0{,}4$; $\overset{0}{y}_{12} = 0{,}2$; $\overset{0}{y}_{13} = 0{,}7$; $\overset{0}{y}_{21} = 0{,}9$; $\overset{0}{y}_{22} = 0{,}2$; $\overset{0}{y}_{23} = 0{,}8$; $\overset{0}{y}_{31} = 1{,}4$; $\overset{0}{y}_{32} = 0{,}2$; $\overset{0}{y}_{33} = 0{,}3$ и при двухшаговом методе:

$$\overset{0}{x}_1 = 0{,}2; \quad \overset{0}{x}_2 = 0{,}45; \quad \overset{0}{x}_3 = 0{,}8; \quad \overset{1}{x}_1 = 0{,}2; \quad \overset{1}{x}_2 = 0{,}4; \quad \overset{1}{x}_3 = 0{,}7.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Poole, W. G., Voigt, R. G., Comput. Rev., **15**, № 10, 379—388 (1974).
2. Weinitschke, H., Numer. Math., **6**, № 5, 395—404 (1964).
3. Ortega, J. M., Rheinboldt, W. C., Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Academic Press, New York, 1970.
4. Lieberstein, H. M., Isaacs, C. D., Comput. and Math. with Appl., **1**, № 1, 27—40 (1975).

Таллинский научно-производственный центр

Поступила в редакцию 9/X 1980