

<https://doi.org/10.3176/phys.math.1980.2.07>

УДК 531.31+531.38

И. КЕИС

## О ДИНАМИКЕ СИСТЕМ ЛАГРАНЖА С ЛИНЕЙНЫМ ПО ГАМИЛЬТониАНУ И ИМПУЛЬСАМ АГРЕГИРУЮЩИМ ИНВАРИАНТОМ

(Представил Н. Алумяэ)

Найдены условия существования инварианта — линейной комбинации  $p$ ,  $H$ . Неавтономная система преобразована в автономную, допускающую понижение порядка на две единицы. Предложена модификация принципа наименьшего действия и рассмотрена устойчивость стационарных движений. Получены агрегирующие инварианты и условия устойчивости равновесий некоторых гамильтоновых систем.

1. Рассмотрим неавтономную динамическую систему  $S$  Лагранжа

$$(p_i + \partial H_1 / \partial q_i - Q_i) \delta q_i = 0 \quad (p_i = \partial L_1 / \partial \dot{q}_i; q_j = \partial H_1 / \partial p_j, i, j = \overline{1, n}), \quad (1.1)$$

$$H_1(t, q, p) = p_j \dot{q}_j - L_1, \quad |\partial^2 L_1 / \partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j| \neq 0, \quad u_i v_i = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u \cdot v, \quad \dot{f} = df/dt,$$

подчиненную идеальным связям, допускающим виртуальное перемещение:

$$\delta^0 q = \varepsilon \partial G_1 / \partial p \quad (G_1 = v_0 H_1 + v_i p_i; v_0, v_i \in C_1(t), v_0 \neq 0). \quad (1.2)$$

С учетом (1.1), (1.2) функция  $G_1[t, q(t), p(t)]$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} G_1 &= D(H_1) + W(Q) \left( D(f) = \right. \\ &= v_0 \frac{\partial f}{\partial t} - v_i \frac{\partial f}{\partial q_i} + v_0 \dot{f} + v_i p_i, W(Q) = \frac{\partial G_1}{\partial p} \cdot Q \left. \right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

При  $W(Q) \equiv 0$  функция  $G_1$  будет инвариантом системы (1.1), (1.2) тогда и только тогда, когда  $H_1$  удовлетворяет уравнению  $D(H_1) = 0$  на  $E^{2n+1}$ . Для этого необходимо и достаточно, чтобы  $G_1$ ,  $H_1$ ,  $L_1$  в переменных  $t, x, p$  были функциями вида

$$G_1(t, q, p) = G(x, p), \quad H_1(t, q, p) = H(t, x, p) = v_0^{-1} [G(x, p) - v_i p_i] \quad (i = \overline{1, n}), \quad (1.4)$$

$$L_1(t, q, \dot{q}) = v_0^{-1} L(x, v_0 \dot{x}), \quad x = q + u, \quad u = \int_0^t v_0^{-1} v \, d\tau \quad (f(t, x, p) = f_1(t, x - u, p)).$$

Для натуральной системы  $S^+$ , обладающей инвариантом  $G_1$ , из (1.4) имеем

$$G(x, p) = 1/2 b_{ij}(x) p_i p_j + b_i(x) p_i + b_0(x),$$

$$L_1 = 1/2 v_0 a_{ij}(x) x_i x_j + a_i(x) x_i + v_0^{-1} a_0(x),$$

$$\partial H_1 / \partial t \neq 0 \text{ при } v_i \partial H_1 / \partial q_i \neq v_0 H_1 + v_i p_i.$$

Замечание 1. Приведем достаточные условия существования у  $2(n+m)$ -мерной идеальной системы  $S''$  подсистемы  $S^+$ , удовлетворяющей (1.1), (1.2), (1.4) при  $W(Q) \equiv 0$ . Рассмотрим систему  $S''$  с векторами  $q'' = (q_i, q'_\alpha)^*$ ,  $Q'' = (Q_i^1, Q'_\alpha)^*$ ,  $i = 1, n$ , и лагранжианом  $L(t, q'', dq''/dt)$ , образованную системами  $S^1: \{q = (q_i)^*, Q^1 = (Q_i^1)^*\}$  и  $S': \{q' = (q'_\alpha)^*, Q' = (Q'_\alpha)^*\}$ ,  $\alpha = n+1, n+m$ . Пусть известно движение  $q' = \dot{f}(t)$  массивной подсистемы  $S'$ , независимое от движений  $S^1$ . Цилиндр  $q' = \dot{f}(t)$ ,  $q'' = \dot{f}^*(t)$  — инвариантное множество  $C$  движений  $S''$ . Обозначим  $Q = Q_0^1 = Q^1(t, q, \dot{q}, q', \dot{q}')$ ,  $L_0'' = L''(t, q, \dot{q}, q', \dot{q}')$ . При  $L_0'' \equiv L_1$  и совпадении на  $q' = \dot{f}(t)$  множеств  $\{dq\}$ ,  $\{\delta q\}$  для  $S^1$  и  $S$  множества движений  $S$  и  $S^1$  (на цилиндре  $C$ ) совпадают. Следовательно,  $S^1 \in S^+$  на  $C$ , а функция  $G_1$  — частный инвариант движений  $S''$  на  $C$ , если удовлетворяются условия (1.2), (1.4),  $W(Q) \equiv 0$ .

Ниже ограничимся потенциальной голономной системой  $S^+$  вида

$$q_i = \partial H_1 / \partial p_i, \quad p_i = -\partial H_1 / \partial q_i \quad (v_0 \equiv 1, Q_i \equiv 0, i = \overline{1, n}), \quad (1.5)$$

$$H_1(t, q, p) = G_1 - v_i p_i, \quad G_1(t, q, p) = G(x, p), \quad x = q + u, \quad u_i = \int_0^t v_i(\tau) d\tau.$$

Согласно (1.4), система (1.5) имеет инвариант  $G_1$  и, наоборот, если  $G_1$  — инвариант системы (1.5), то она является системой  $S^+$ . Система (1.5) эквивалентна автономной канонической системе с гамильтонианом  $G(x, p)$ . Действительно, преобразование  $x = \partial F / \partial p'$ ,  $p = \partial F / \partial q = p'$ ,  $F = p' \cdot (q' + u)$  переводит (1.5) в автономную каноническую систему с гамильтонианом — инвариантом вида

$$x = \partial G / \partial p, \quad p = -\partial G / \partial x \quad (G = G(x, p) = H' = H_1 + \partial F / \partial t). \quad (1.6)$$

Следовательно, система (1.5) с инвариантом  $G_1(t, q, p)$  преобразуется в автономную систему (1.6), для которой имеем равенства

$$L_1(t, q, q') = L(x, x') = p \cdot x' - G(x, p), \quad p = \partial L_1 / \partial q' = \partial L / \partial x', \quad (1.7)$$

$$A^{-1} = B = B^* \quad (A = \|\partial^2 L / \partial x_i \partial x_k\|, B = \|\partial^2 G / \partial p_i \partial p_k\|, i, k = \overline{1, n}).$$

Система  $S^+$  вида (1.5) эквивалентна (1.6), допускающей понижение порядка на две единицы. Введем переменную  $p_0 = -G(x, p)$ . При  $x_n = \partial G / \partial p_n \neq 0$  обозначим решение уравнения  $p_0 = -G(x_i, p_j, p_n)$  ( $j = \overline{1, n-1}$ ) через  $P(x_i, p_j, p_0) = -p_n$ . Тогда для определения траекторий имеем  $2(n-1)$ -мерную каноническую систему и уравнение зависимости  $x, p$  от  $t$  вида

$$x'_j = \partial P / \partial p_j, \quad p'_j = -\partial P / \partial x_j, \quad t' = \partial P / \partial p_0 \quad (p'_0 = -\partial P / \partial t = 0, f' = df / dx_n). \quad (1.8)$$

При  $x_i^\alpha = x_i(t_\alpha) = \text{const}$  и нефиксированных  $t_0, t_1$  на траектории  $y(\tau)$  системы

$$d(\partial K / \partial x'_j) / d\tau = \partial K / \partial x_j,$$

$$t' = -\partial K / \partial p_0 \quad (y = (x_j)^*, \tau = x_n, p_0 = \text{const}, \alpha = \overline{0, 1}), \quad (1.9)$$

$$K(x, y', p_0) \equiv x'_j P_j(x, y', p_0) - P(x, P^1, p_0) \\ (x = (x_j, \tau)^*, \quad P^1 = (P_j)^*, \quad j = \overline{1, n-1}),$$

полученной из (1.8) решением уравнений  $x'_j = \partial P / \partial p_j$  относительно  $p_j$  в пересечении областей определения  $P$  и  $|\partial^2 P / \partial p_j \partial p_k| \neq 0$ , стационарно действие типа Якоби

$$W = \int_{\tau_0}^{\tau_1} K(y, \tau, y', p_0) d\tau \quad (\tau_\alpha = x_n(t_\alpha), y(\tau) \in C_2).$$

В случае  $B = \|\partial^2 G / \partial p_s \partial p_\sigma\| > 0$  на  $R_0$  для получения  $K$  исключим  $t'$  из (1.9) с помощью  $G$

$$K = t' x_i p_i = t'(L + G) = t'(L - p_0) = t'[L^1(x, y', t') - p_0] \quad (x_i = x'_i / t'), \\ L^1(x, y', t') \equiv L(x, y' / t', 1 / t'), \quad p_n = -P, \quad R_0 = \{\partial G / \partial p_n \neq 0, G = -p_0\} \\ (i, s, \sigma = \overline{1, n}), \\ -G \equiv f(x, y', t') = L^1(x, y', t') + t' \partial L^1 / \partial t' = L - x_i \partial L / \partial x_i = p_0, \\ b_{s\sigma} = \partial^2 G / \partial p_s \partial p_\sigma = \partial^2 H / \partial p_s \partial p_\sigma.$$

Из (1.7), (1.8), (1.10) в области  $R_0$  находим неравенства

$$1 / t' = \partial G / \partial p_n \neq 0, \quad A = B^{-1} > 0, \quad t' \partial f / \partial t' = \partial G / \partial p \cdot A \partial G / \partial p > 0, \quad \partial f / \partial t' \neq 0, \\ (1.11)$$

при которых уравнение  $f = p_0$  имеет в некоторой окрестности точки  $(x_0, y'_0, p_0)^*$  единственное решение  $t' = T(x, y', p_0) \in C_1$ . Подстановкой  $t' = T$  в (1.10) находим  $K(x, y', p_0)$ , которая является функцией Рауса для лагранжиана  $L_1^1(x, y', t') \equiv t' L^1(x, y', t')$ . Действительно, из (1.10), (1.11) имеем

$$R(x, y', p_0) = L_1^1 - t' \partial L_1^1 / \partial t' = L_1^1 - p_0 t' = K(x, y', p_0).$$

Из инвариантности экстремалей при замене переменных найдем для (1.5) две формы модификации принципа наименьшего действия. На движении  $(t(x_n), q_j(x_n))^*$  интеграл

$$W_1 = \int_{\tau_0}^{\tau_1} K^1(t, \xi, \tau, t', \xi', p_0) d\tau \quad (\xi = (q_j)^*, \quad \xi' = d\xi / d\tau, \quad dt / d\tau = t'),$$

$$K^1 = K(\xi + w, \tau, \xi' + t' w', p_0) \quad (\xi, t \in C_2(\tau), \quad w =$$

$$= (u_j)^*, \quad \tau = x_n = q_n + u_n(t), \quad j = \overline{1, n-1})$$

имеет стационарное значение для всех кривых, удовлетворяющих условиям

$$q_j(\tau_\alpha) + u_j[t(\tau_\alpha)] = c_{j\alpha}^1 = \text{const}$$

$$(\tau_\alpha = \text{fixconst}, \quad c_\alpha^1 = y(\tau_\alpha), \quad q'_j = dq_j / d\tau, \quad \alpha = \overline{0, 1}),$$

$$L^0 + t' (\partial L^0 / \partial t' - w_j \partial L^0 / \partial q'_j) =$$

$$= p_0 (L^0(t, \xi, \tau, t', \xi') = L_1(t, q_j, \tau - u_n, q'_j / t', 1 / t' - w_n).$$

Обозначим  $G^1(x, x') = G(x, \partial L / \partial x')$ . Из (1.10), используя  $\Delta$ -вариан-

цию ( $\Delta F = \delta F + \Delta t dF/dt$ ), находим стационарность действия типа Лагранжа

$$W_2 = \int_{t_0}^{t_1} x_i \partial L / \partial x_i dt \quad (F = F(t, x, \dot{x}), \partial L / \partial x_i = p_i, i = \overline{1, n}) \quad (1.12)$$

при  $G^1[x(t), \dot{x}(t)] \equiv x_i \partial L / \partial x_i - L(x, \dot{x}) = -p_0, x_i(t_\alpha) = x_{i\alpha} = \text{const}$  на движении  $x(t)$  системы (1.6). Действительно, из (1.7), (1.12) получаем равенства

$$\Delta G^1 = 0, \quad (p \cdot \Delta x) \Big|_0^1 \equiv p(t_1) \cdot \Delta x(t_1) - p(t_0) \cdot \Delta x(t_0) = 0, \quad (1.13)$$

$$\Delta W_2 = \Delta \int_{t_0}^{t_1} (L + G) dt = \Delta \int_{t_0}^{t_1} L dt - p_0 \Delta(t_1 - t_0) = (p \cdot \Delta x) \Big|_0^1 = 0,$$

которые доказывают утверждение. В переменных  $t, q$  из (1.12), (1.13)

$$\text{имеем } \Delta W_3 = 0, \quad W_3 = \int_{t_0}^{t_1} (q_i + u_i) \partial L_1 / \partial q_i dt \quad (q_i = dq_i/dt, i = \overline{1, n}, \alpha = 0, 1)$$

$$\text{при условиях } (q' + u) \cdot \partial L_1 / \partial q' - L_1 = -p_0, \quad q(t_\alpha) + u(t_\alpha) = \text{const} \quad (u'(t_\alpha) \Delta t_\alpha = -\Delta q(t_\alpha)).$$

2. Обозначим невозмущенное и возмущенное движения системы (1.6) через  $x^1(t), p^1(t), \xi = x - x^1, \eta = p - p^1$  соответственно. Из равенств  $q^1 = x^1 - u, \dot{\xi} = q - q^1$  заключаем, что исследование устойчивости решения (1.5) по всем (некоторым) переменным сводится к аналогичной задаче для движения  $x^1, p^1$ -автономной системы (1.6). При этом точкам покоя (1.6) отвечают нестационарные движения (1.5), если  $u' \neq 0$ . Канонические уравнения возмущений (1.5)

$$\dot{\xi} = \partial G^1 / \partial \eta, \quad \dot{\eta} = -\partial G^1 / \partial \xi,$$

$$G^1 = G(x^1 + \xi, p^1 + \eta) - \xi \cdot \partial G / \partial x^1 - \eta \cdot \partial G / \partial p^1 - G(x^1, p^1) \quad (2.1)$$

имеют инвариант  $V^1(t, \xi, \eta) = G(x^1 + \xi, p^1 + \eta) - G(x^1, p^1)$ . Приведем достаточные условия устойчивости стационарных движений  $x^1 = x^0 = \text{const}, p^1 = p^0 = \text{const}$ , заданных равенствами

$$\partial G / \partial x^0 = \partial G / \partial p^0 = 0 \quad (x^0 = (x_i^0)^*, p^0 = (p_j^0)^*, i, j = \overline{1, n}).$$

В новых обозначениях инвариант  $V^1$  системы (2.1) имеет вид

$$V^1 = V(z) = G^1(z) = G(z^0 + z) - G(z^0), \quad V(0) = 0, \quad (2.2)$$

$$z = (\xi_\alpha, \xi_\beta, \eta_j)^*, \quad z^0 = (x_i^0, p_j^0)^*, \quad y = (\xi_\beta, \eta_j)^*, \quad \xi' = (\xi_\alpha)^*, \quad \xi'' = (\xi_\beta)^*,$$

$$\alpha = \overline{1, k} \leq n, \quad \beta = \overline{k+1, n}, \quad k \geq 0, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Пусть  $V(z)$  —  $y$ -определенно положительная функция. Тогда  $\exists W \in C(y), W(0) = 0, W > 0, y \neq 0, V \geq W$  на  $|y| \leq \delta_0 = \text{const}$  и стационарное движение  $x^0, p^0$  устойчиво [1] по переменным  $x_\beta, p_j$ . Если  $S^+$  — натуральная система, то инвариант (2.2) системы (2.1) будет определено положительным по  $\xi_\beta, \eta_j$

$$V(z) = 1/2 \eta^1 B \eta^1 + P(x) - P(x^0), \quad \eta^1 = \eta + g(\xi), \quad g = A(x) b(x) - A(x^0) b(x^0), \quad (2.3)$$

$$P(x) = b_0(x) - 1/2 b(x) \cdot A(x) b(x), \quad g(0) = 0, \quad p^0 = -A(x^0) b(x^0), \quad x = x^0 + \xi,$$

$$B = A^{-1} = \|b_{ij}(x^0 + \xi)\|, \quad G(x, p) = 1/2 b_{ij} p_i p_j + b_i p_i + b_0$$

при  $\eta^1 \cdot B\eta^1 \geq b^0 |\eta^1|^2 \equiv W_1(\eta^1)$ ,  $P(x) - P(x^0) \geq W_0(\xi'')$  ( $0 < b^0 = \text{const}$ ),  $W_0 > 0$ ,  $\xi'' \neq 0$ ,  $W_0(0) = 0$ ,  $W_0(\xi'') \in C$ ,  $0 \leq |\xi''| \leq \delta_0 = \text{const}$ . Здесь  $V \geq W \equiv W_0(\xi'') + W_1(\eta^1)$ . Пусть  $g_i(\xi) \rightarrow 0$  при  $|\xi''| \rightarrow 0$  равномерно по  $\xi'$ , а  $g_i(\xi', 0) \equiv 0$ . Тогда из неравенств  $|\eta_i| \leq |\eta_i^1| + |g_i|$  и непрерывности  $g_i(\xi)$  следует устойчивость  $x^0, p^0$  по переменным  $x_\beta, p_i$ . Если  $z^0$  — изолированный минимум  $G$ , то  $x^0, p^0$  устойчиво по всем переменным. Этот случай имеем при  $\|\partial^2 G / \partial z_s^0 \partial z_\sigma^0\| > 0$ , где  $n$  неравенств выполняются в силу  $B > 0$ ,  $z^0 = (x_i^0, p_j^0)^*$ ,  $s, \sigma = 1, 2n$ . Рассмотрим  $x^0, p^0$ -устойчивость Лагранжа по переменным  $x_\beta, p_i$ . Пусть при равномерности по  $\xi' \in E^h$  имеем

$$G^1(z) \geq W^1(y), \quad W^1 \rightarrow +\infty \text{ при } |y| \rightarrow \infty \quad (W^1(y) \in C(E^{2n-h})). \quad (2.4)$$

Тогда для любого решения (2.1) с началом в  $|y(t_0)| \leq \text{const}$  предположение  $\lim |y(t)| = \infty$  противоречит условиям (2.4) и  $G^1[\xi'(t), y(t)] = \text{const}$ . Следовательно,  $x^0, p^0$  относительно  $x_\beta, p_i$  устойчиво по Лагранжу. С учетом (2.3) условие (2.4) выполняется для натуральной (1.5), если

$$\min(e \cdot Be) \geq \beta_0 = \text{const}, \quad |e| = 1; \quad |Bg| \leq \gamma_0 = \text{const} \quad (g = g(\xi)), \quad (2.5)$$

$$P(x^0 + \xi) \geq P_1(\xi'') \in C; \quad P_1(\xi'') \rightarrow +\infty, \quad |\xi''| \rightarrow \infty \quad (\xi \in E^n).$$

$y$ -компонента любого решения (2.1) ограничена, так как в случае (2.5) функция  $W_0^1(y) = 1/2\beta_0 |\eta|^2 - \gamma_0 |\eta| + P_1(\xi'') - P(x^0)$  удовлетворяет (2.4).

Замечание 2. Все ранее сказанное в пп. 1 и 2 справедливо и для случая неавтономной системы Гамильтона  $S_+$  с инвариантом  $G_+ = H(t, q, p) + h \cdot p$ , где  $h = (h_i)^* = h(q_\alpha)$ ,  $h_\alpha \neq 0$ ,  $\partial h / \partial q_\beta \equiv 0$ ,  $\beta \neq \alpha \in 1, n$ . Действительно, вводя переменные  $x, p'$  равенствами

$$x = \partial f / \partial p', \quad p = \partial f / \partial q, \quad f \equiv g \cdot p = \sum_{s=1}^n g_s p_s,$$

$$g_\alpha = t + \int_{q_\alpha^0}^{q_\alpha} h_\alpha^{-1}(\xi) d\xi, \quad g_\beta = q_\beta - \int_{q_\alpha^0}^{q_\alpha} h_\alpha^{-1}(\xi) h_\beta(\xi) d\xi \quad (\alpha \neq \beta = \overline{1, n}),$$

получим аналогичную (1.6) автономную систему

$$dx/dt = \partial G / \partial p', \quad dp'/dt = -\partial G / \partial x \quad (G = G(x, p') = G_+(t, q, p)).$$

3. Примеры. С учетом замечания 1 рассмотрим аналогичную [2] систему  $S^1$ , состоящую из воздействующей  $S'$ -системы  $M$  центров, вращающихся вокруг  $o\beta$  с  $\Omega_0 = \text{const} \geq 0$ ,  $r_v = \Omega_0 \beta \times r_v$  ( $v = \overline{1, M}$ ), и свободной системы из  $N$  точек  $S^+$  с функцией внутренних и внешних сил — потенциалом позиционных и электромагнитных взаимодействий вида

$$L_0(r') + \sum_{s=1}^N a_s(r') \cdot r'_s,$$

$$L_0 = \sum_{v,s}^{M,N} f_{vs}(Q_{v\alpha}, Q_{s\alpha}, Q_{vs}) + \sum_{s \neq \sigma}^N f_{s\sigma}(Q_{v\alpha}, Q_{\sigma\alpha}, Q_{s\sigma}) \quad (\alpha = \overline{1, 2}),$$

$$Q_{i1} = |r_i|, \quad Q_{i2} = r_i \cdot \beta, \quad Q_{ij} = |r_i - r_j|,$$

$$r' = (r'_s)^*, \quad r'_s = r_s - \Omega_0 \beta \times r_s, \quad \beta = \text{const}, \quad |\beta| = 1; \quad s, \sigma = \overline{1, N}.$$

В силу результатов пп. 1 и 2, система  $S^+$  имеет инвариант движения

$$G(r', p') = 1/2 m_s r_s'^2 - L_0 - \Omega_0 \beta \cdot (M^+ + m^+),$$

$$M^+ = r_s \times m_s r_s', \quad m^+ = r'_s \times a'_s. \quad (3.1)$$

Подслучаем этого случая будет гириостат  $S$  Жуковского, если  $S'$  — массивный гириостат  $S_0 (M_1/M_0 \ll 1)$ , вращающийся вокруг  $\beta$  с  $\Omega_0 = \text{const} \geq 0$ . Ниже для простоты примем  $L_1 = a'(r') \cdot r' + a''(\lambda') \omega$  ( $\omega' = \omega - \Omega_0 \beta$ ), где  $r', \lambda'$  — координаты центра масс и ориентации  $S_1$  относительно неподвижного в  $S_0$  триэдра  $oe_1e_2\beta$ . Из (3.1) с учетом обозначений [2] находим инвариант поступательно-вращательного движения  $S_1$  относительно  $S_0$  в виде его гамильтониана

$$H = G(r', \lambda', p) = H'(r', p', \lambda') + H''(\lambda', p'', r') - V(r', \lambda') \\ (p = (p'_i, p''_j)^*, \quad i, j = \overline{1,3}, \quad Q_k \equiv 0), \quad (3.2)$$

$$H' = 1/2 M_1 [r'^2 - \Omega_0^2 (\beta \times r')^2] + V \quad (\omega = \omega' + \Omega_0 \beta, \quad r' = r' + \Omega_0 \beta \times r),$$

$$H''_{(\beta)} = T_2 + V - \Omega_0 \beta \cdot K, \quad 2T_2 = \omega \cdot C \omega + I_h^{-1} r_h'^2,$$

$$K = G \omega + k + a'', \quad C = G - g \quad (\overline{00_1} = r),$$

$$r_h = I_h [(\omega \cdot i_h) + a'_h] = \text{const},$$

$$g = \|g_{\alpha\beta}\|, \quad g_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^p I_h (i_{k\alpha} \cdot i_{k\beta}) \quad (\alpha, \beta = \overline{1,3}, \quad k = 1, 2),$$

$$k = \sum_{k=1}^p I_h a'_k i_k, \quad l = g \omega + k = \sum_{k=1}^p r_h i_k, \quad L = 1/2 M_1 r'^2 + T_2 + L_1 - V,$$

$$p' = \partial L / \partial r', \quad p'' = \partial L / \partial \lambda',$$

где  $i_k$  — орты твердых и жидких роторов, фиксированных в  $o_1e'_1e'_2e'_3$  — главном триэдре  $S_1$ . Из допущения у  $S_1$  инвариантных множеств  $r' = r'_*[t]$ ,  $r'' = r''*[t]$  в ограниченной задаче при  $V_* \equiv V_0^*[t] + V_1^*(\lambda')$  следует ошибочный вывод о существовании на  $r' = r'_*$  инварианта вращения  $S_1$  в виде  $H''_* + T'_*[t]$  ( $H''_* \equiv H''|_{r'=r'_*}$ ,  $T'_* \equiv T'|_{r'=r'_*}$ ). Аналогичные пп. 1, 2 и замечанию 2 результаты [3] получим для подсистемы вращения  $S_1^*$  с инвариантом  $G = g_0 H''_* + g_i p_{i*}$  вращения  $S_1$  при  $r' = r'_*[t]$  ( $g_j = g_j(t, \lambda')$ ,  $j = \overline{0,3}$ ). В частности, рассмотрим круговое движение центра масс  $S_1$  ( $|r_*| = r_0 = \text{const}$ ,  $\omega_* = \omega_0 n = \text{const}$ ,  $\omega_0 = \text{const}$ ,  $M_1/M_0 \ll 1$ ), когда оси симметрии  $o\beta$  и вращения с  $\Omega_0(t) \sim 0$  гравитирующего сфероида  $S_0$  совпадают и выполняются условия

$$\varepsilon_1 = R_1 r_0^{-1} \ll 1, \quad |\varepsilon_2| \equiv |C_0 - A_0| M_0^{-1} R_0^{-2} \ll 1, \quad a'' = a''(n, \gamma).$$

При  $\tilde{V}_*$ -асимптотике  $V_*$  с  $\varepsilon_1^2, \varepsilon_2$ -членами [2] из (3.2) находим  $G$ -инвариант

$$H''_{n_*} \simeq G = T_2 + \tilde{V}_* - \omega_0 n \cdot K, \quad L'' = T_2 + a'' \cdot \omega - V_* \quad (K = G \omega + k + a''), \quad (3.3)$$

$$-\tilde{V}_* = \mu r_0^{-1} \left\{ M_1 \left[ 1 - \frac{\varepsilon_2 R_0^2 (1 - 3s^2)}{2r_0^2} \right] - \frac{3\varepsilon_1^2}{2R_1^2} [\gamma \cdot G \gamma - 1/3 \delta_{ij} G_j] \right\} \quad (i, j = \overline{1,3}).$$

$$s^2(t) = \sin^2 \alpha_0 \cos^2[\omega_0(t-t_0) + c_0], \quad \cos \alpha_0 \equiv n \cdot \beta, \quad \gamma = \gamma_i e'_i = r/r_0, \quad \bar{V}^* \equiv \bar{V}^*|_{s=0}.$$

З а м е ч а н и е 3. При круговом движении  $r = [t]$  и произвольной функции  $V(t, r', \lambda')$  для инвариантности  $H_{n''}$  необходимо и достаточно, чтобы  $V^* = V_0^*[t] + V_1^*(\gamma, n)$ . Отсюда в случае трехосного  $S_0$  при главном резонансе  $\beta = n$ ,  $\Omega_0 = \omega_0$  сохраняется гамильтониан вращения  $S_1$  относительно орбитной системы координат  $o_1 \gamma n$ .

$$H''_n = G = T_2 - \omega_0 \beta \cdot K + V^*(V^* = V_1^*(\gamma, \beta) \equiv V(r', \lambda')|_{r=r_0}, V_0^* \equiv 0).$$

В связи с (3.2), (3.3) рассмотрим систему, для которой  $H = H(\xi, \varepsilon)$  — голоморфная по  $\varepsilon$  функция; решения и инвариант  $H$  —  $\varepsilon$ -аналитичны и представимы в  $t \geq t_0$ ,  $|\xi| < \infty$  равномерно сходящимися рядами

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \xi_k(t), & H(\xi, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k H_k(t, \xi_k), \\ H &= H'_0(x, p) + H''_0(\xi, \psi) + \varepsilon^2 V(x, \xi, \varepsilon), \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$H_0 = H'_0 + H''_0, \quad V = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k V_k(x, \xi), \quad \xi = (y_s, z_\sigma)^*,$$

$$y = (x_i, p_j)^*, \quad z = (\xi_i, \psi_j)^* \quad (s, \sigma = \overline{1, 2n}; i, j = \overline{1, n}).$$

Так как при  $k \geq 1$  в (3.2), (3.3)  $V_k(x, \xi)$  плохо известны, то имеет смысл ограничиться  $\varepsilon^2$ -приближениями  $\tilde{\xi}_2 \equiv \xi_0 + \varepsilon^2 \xi_2 \simeq \xi$ ,  $\tilde{H}_2 \equiv H_0 + \varepsilon^2 H_2 \simeq H$ , где

$$x'_0 = \partial H'_0 / \partial p_0, \quad p'_0 = -\partial H'_0 / \partial x_0, \quad \xi'_0 = \partial H''_0 / \partial \psi_0, \quad \psi'_0 = -\partial H''_0 / \partial \xi_0, \quad (3.5)$$

$$x'_2 = \partial V'_0 / \partial p_0,$$

$$p'_2 = -\partial V'_0 / \partial x_0 - k \sim y'_2 = A y_2 + f \quad (V'_0 \equiv y_2 \cdot \nabla H'_0(y_0), k \equiv \partial V_0 / \partial x_0),$$

$$\xi'_2 = \partial V''_0 / \partial \psi_0,$$

$$\psi'_2 = -\partial V''_0 / \partial \xi_0 - h \sim z'_2 = B z_2 + g \quad (V''_0 \equiv z_2 \cdot \nabla H''_0(z_0), h \equiv \partial V_0 / \partial \xi_0).$$

Пусть (как в случае (3.3),  $a'' = \text{const}$ ) для (3.5) известно решение  $\xi_0[t, \xi_0(t_0)]$ . Тогда, согласно теореме Пуанкаре, известны матрицанты,  $\xi_2$ -решение и реальный  $\varepsilon^2$ -асимптотический инвариант достоверной части системы (3.4)

$$y_2 = Y y_{20} - \int_{t_0}^t Y_2^- k d\tau, \quad Y(t_0, t_0) = I, \quad Y^{-1} = \|Y_1^- Y_2^-\|, \quad \xi_2(t_0) = \xi_{20}, \quad X X^{-1} = I, \quad (3.6)$$

$$z_2 = Z z_{20} - \int_{t_0}^t Z_2^- h d\tau, \quad Z(t_0, t_0) = I, \quad Z^{-1} = \|Z_1^-, Z_2^-\|,$$

$$\xi(t_0) = \xi_0(t_0), \quad \xi_2^0 = \xi_2|_{h=0},$$

$$\begin{aligned} H &= H_0(\xi_0) + \varepsilon^2 [\xi_2 \cdot \partial H_0 / \partial \xi_0 + V_0(x_0, \xi_0)] + o(\varepsilon^2) = \\ &= H_0(\tilde{\xi}_2) + \varepsilon^2 V_0(x_0, \xi_0) + o(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

$$H_0[\xi_0(t)] = \text{const}; \quad \xi_2^0 \cdot \partial H_0 / \partial \xi_0 = \text{const}, \quad H \simeq \tilde{H}_2 \equiv H_0(\tilde{\xi}_2) + \varepsilon^2 V_0(\tilde{x}_2, \tilde{\xi}_2),$$

$$P(t) - P(t_0) = (x_0 \cdot \partial V_0 / \partial x_0) \Big|_{t_0}^t + \int_{t_0}^t x_0 \cdot (\partial V_0 / \partial x_0) \cdot d\tau, \quad P \equiv y_2 \cdot \partial H'_0 / \partial y_0.$$

Из (3.5), (3.6) выводим необходимое и достаточное условие независимости  $\tilde{y}_2$  от  $\tilde{z}_2$  (или  $\tilde{z}_2$  от  $\tilde{y}_2$ ), эквивалентное  $\epsilon^2$ -инвариантности  $y$  (или  $z$ ) вида

$$\partial^2 V_0 / \partial \xi \partial x_0 = \partial [\partial V_0 (\xi, x_0) / \partial x_0] / \partial \xi \equiv 0 \quad (\partial^2 V_0 / \partial x \partial \xi_0 \equiv 0). \quad (3.7)$$

Вдоль  $x_0(t)$ , удовлетворяющего (3.7), согласно (3.6)  $z$ -подсистема (3.4) имеет  $\epsilon^2$ -асимптотический инвариант  $H''_0(\xi, \psi) + \epsilon^2 V_0[x_0(t), \xi] + H'_0(\tilde{y}_2)$ .

Рассмотрим устойчивость  $v$ -стационарного вращения  $o_1 e'_i$  вокруг  $o_1 \gamma \tau n$  в случае (3.3), где  $V = V_0^*[t] + V_1^*(\gamma, n)$ ,  $a'' = \text{const}$ . Ориентацию  $o_1 e'_i$  к  $o_1 \gamma \tau n$  зададим матрицей  $\|a_{ij}[\lambda(v)]\|$ , где  $v_i$  — новые переменные без особенностей в  $\theta = 2\pi N$ , для которых  $V_1^* \equiv P(a_{ij})/P_0(a_{ij})$  переходит в дробно-рациональную функцию от  $v = (v_i)^*$ :

$$\begin{array}{c|c|c|c} & \gamma & \tau & n \\ \hline e'_1 & \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_0 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2) & 2(\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_2) & \lambda_0 = (|v|^2 - 1)(1 + |v|^2)^{-1} \\ e'_2 & 2(\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_3) & \lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_0 \lambda_1 + \lambda_2 \lambda_3) & \lambda_j = 2v_j(1 + |v|^2)^{-1} \\ e'_3 & 2(\lambda_0 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3) & 2(\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_1) & \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 & i, j = \overline{1, 3} \end{array} \quad (3.8)$$

$$v_1 = v_0 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \quad v_2 = v_0 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2, \quad v_3 = v_0 \cos \varphi_1 \sin \varphi_3,$$

$$v_0 = (1 - \cos \varphi_1 \cos \varphi_3)^{-1},$$

$$2\varphi_1 = \theta, \quad 2\varphi_2 = \psi - \varphi, \quad 2\varphi_3 = \psi + \varphi.$$

В переменных  $\omega, v$  уравнения вращения  $S_1$  и инвариант (3.3) имеют вид

$$K + \omega \times K + B^* \nabla_v V = 0, \quad v \cdot = B \omega' \quad (K = \partial T / \partial \omega = C \omega + b, \quad T \equiv T_2 + a'' \cdot \omega), \quad (3.9)$$

$$4B = \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{ccc} v_2^2 + v_3^2 - v_1^2 - 1, & -2(v_1 v_2 + v_3), & -2(v_1 v_3 - v_2) \\ 2(v_3 - v_1 v_2), & v_1^2 + v_3^2 - v_2^2 - 1, & -2(v_1 + v_2 v_3) \\ -2(v_2 + v_1 v_3), & 2(v_1 - v_2 v_3), & (v_1^2 + v_2^2 - v_3^2 - 1) \end{array} \right\| \begin{array}{l} \det B \neq 0, \quad b = l + a'' = \epsilon_0, \\ \omega = \omega' + \omega_0 n, \\ (\partial T / \partial a'_k) \cdot = Q_k \equiv 0, \end{array} \end{array}$$

$$G = R_2 + W = 1/2 [\omega' \cdot C \omega' + \sum_{k=1}^p r_k^2 I_k^{-1} + \omega_0^2 W_0(v, c)],$$

$$W_0 = \omega_0^{-2} P - n \cdot C n - 2(c \cdot n),$$

$$P = 2V_1^*(v), \quad 2\tilde{V}_1^* = 3\omega_0^2 (\gamma \cdot G \gamma),$$

$$c \equiv b/\omega_0, \quad \omega_0 = \omega_0(r_0, \epsilon_2, a_0) = \text{const}, \quad r_k = \text{const}.$$

Из (3.9) и стационарности  $G$  по  $v$  находим искомое вращение  $\omega^0, v^0$  лишь в виде относительного равновесия  $\omega'_0 = 0, v^0 = v_0 = \text{const}$ . Необходимо и достаточно, чтобы параметры  $c, v^0$  удовлетворяли линейной по  $c$  системе уравнений

$$\begin{array}{l} A c = a, \quad A = \|a_{ij}\|, \quad a_{ij} = \partial n_j / \partial v_i^0, \\ \det A \equiv 0, \quad a = 1/2 \nabla_v \Phi(v^0), \quad \Phi \equiv \omega_0^{-2} P - n \cdot C n, \end{array} \quad (3.10)$$



$$A_0^3/4 = \begin{vmatrix} 2[\varrho(v_3 + v_1 v_2) - 4v_1^2 v_3] + \Delta_1, & [\varrho(\varrho - 2v_1^2) - 8v_1 v_2 v_3] + \Delta_2, & 4v_1(v_1^2 + v_2^2 - v_3^2 - 1) \\ [\varrho(2v_2^2 - \varrho) - 8v_1 v_2 v_3] + \Delta_3, & 2[\varrho(v_3 - v_1 v_2) - 4v_2^2 v_3] + \Delta_4, & 4v_2(v_1^2 + v_2^2 - v_3^2 - 1) \\ 2[\varrho(v_1 + v_2 v_3) - 4v_1 v_3^2] + \Delta_5, & 2[\varrho(v_2 - v_1 v_3) - 4v_2 v_3^2] + \Delta_6, & 8v_3(v_1^2 + v_2^2) \end{vmatrix}$$

$$\times (\varrho = 1 + |v^2|),$$

$$\Delta_1 = -8v_1 v_2, \quad \Delta_2 = 8v_1^2 - 2\varrho, \quad \Delta_3 = 2\varrho - 8v_2^2, \quad \Delta_4 = -\Delta_1,$$

$$\Delta_5 = -8v_2 v_3, \quad \Delta_6 = 8v_1 v_3,$$

адекватной безусловной стационарности  $W_0$  в  $v^0$ , где  $\partial W_0 / \partial v^0 = 0$ . Обозначим

$$A^+ = \|A, a\|, \quad r(M) = \text{rank } M, \quad R^{(\delta)} = \{v \mid r(A) = r(A^+) = \delta\},$$

$$R^+ = \bigcup_{\delta} R^{(\delta)}, \quad R^{(\delta_1)} \cap R^{(\delta_2)} = \emptyset,$$

$\delta_1 \neq \delta_2$ ;  $\delta, \delta_1, \delta_2 = \overline{0, 2}$ . Для существования решения (3.10) необходимо и достаточно  $v^0 \in R^+$ , где  $R^+$  — допустимое множество  $\{v^+\}$ . Следует различать  $R^{(\delta)}$ . Из (3.8), (3.10) в случаях  $v^0 \in R^{(\delta)}$  находим, что все решения дают формулы

$$c_0^{(0)} = \mu_1 n + \mu_2 \gamma + \mu_3 \tau, \quad c_0^{(1)} = \mu_1 n + \mu_2 g + a_3(n \times g), \quad c_0^{(2)} = \mu_1 n + a_1 \tau + a_2 \gamma$$

$$(An = 0), \quad (3.11)$$

где  $Ag = 0$ ,  $g \cdot n = 0$ ,  $|g| = 1$ ,  $\mu_i$  — произвольные,  $a_i$  — фиксированные постоянные. Из (3.10), (3.11) для (3.3) (например, при гравитирующих  $S_0, S_1$ ) имеем два следствия. Неравенство  $l + a'' \neq 0$  — одна из причин несовпадения триэдров  $o_i \gamma_i n$  и  $o_i e_i'$ . При этом выбором  $c$  невозможно получить произвольную стационарную ориентацию триэдров, так как в общем случае  $R^+ \neq E^3$ . Параметры скрытого движения  $c_i$  неоднозначно определены параметрами  $v_j^0$  реального наклона триэдров.

Возьмем из (3.4) любое решение  $c_0^* = c_0(v^0) \in \{c_0^{(\delta)}\}$  в допустимой точке  $v^0$ . По теореме Ляпунова для безусловной устойчивости  $v = v^0$ ,  $\omega' = 0$  достаточно, чтобы  $W_0(v, c_0^*)$  имела в  $v^0$  изолированный минимум. В обыкновенной точке  $v_0^0$  ( $|\partial^2 W_0(v_0^0, c_0^*) / \partial v_i \partial v_j| \neq 0$ ) грубый критерий такой устойчивости дают условия Сильвестра  $D_i(v_0^0, c_0^*) > 0$ ,  $i, j = 1, 3$ . В последнем случае для неустойчивости  $v_0^0, 0$ , согласно теореме Томсона, достаточно, чтобы в точке  $v_0^0, c_0^*$  нечетное число этих неравенств изменило знак. Произвол  $\mu_i$  можно подчинить условию смены устойчивости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В. В., Вестн. Моск. ун-та, Матем. Мех., № 4, 38—52 (1957).
2. Кейс И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 24, № 3, 277—284 (1975).
3. Кейс И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 28, № 1, 83—85 (1979).

Институт кибернетики  
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию  
29/XII 1979

I. KEIS

HAMILTONIAANI JA IMPULSSIDE POOLEST LINEAARSE  
AGREGEERIMISVARIANDIGA LAGRANGE'I SÜSTEEMI DÜNAAMIKAST

On leitud invariandi  $G$  olekutingimused, kui  $G$  kujutab endast impulsside ja hamiltoniaani lineaarset kombinatsiooni holonoomsete ning mitteholonoomsete süsteemide jaoks.  $G$ -invariandiga mitteautonoomne kanooniline süsteem on teisendatud Hamiltoni autonoomsesse süsteemi. Esitatakse minimaalse mõju printsiibi modifikatsioon. Agregeerimisvariant on leitud sferoidi mittetsentraalses gravitatsiooniväljas ning orbiidil liikuva süsteemi jaoks.

I. KEIS

ON THE DYNAMICS OF LAGRANGE SYSTEM WITH THE AGGREGATING  
INVARIANT LINEAR IN HAMILTONIAN AND THE IMPULSES

Under the conditions

$$\delta^0 q \triangleq \varepsilon(v + v_0 q) \in \{\delta q\}, \quad Q \cdot \delta^0 q = 0 \quad (j' = df/dt, v = (v_k)^*),$$

$$v \cdot \partial H / \partial q - v_0 \partial H / \partial t = v_0 H + v \cdot p \quad (u \cdot v = \sum_{k=1}^n u_k \cdot v_k, k = \overline{1, n})$$

the ideal holonomic and non-holonomic Lagrange systems obtain the generalized energy invariant  $G \triangleq v_0 H + v \cdot p = \text{const}$ . In the new variables  $x, p'$  (1.5) every canonic system with  $G$ -invariant is decomposed and represented in the form of  $2(n-1)$ -dimensional canonic system independent of the two equations on  $x_n, x_{n+1}$ . The generalized Maupertuis-Lagrange principle is proposed for this system. Various gyrostatic systems have this type of invariant and all the properties noted above. As an example, the aggregating invariant is obtained for the circular gyrostate motion around the gravitating spheroid. The sufficient stability conditions for relative equilibrium are derived in the essentially new attitude parameters  $v_i$  (3.8).