EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 29. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1980, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 29
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1980, № 2

УДК 531.31+531.38

И. КЕЙС

О ДИНАМИКЕ СИСТЕМ ЛАГРАНЖА С ЛИНЕЙНЫМ ПО ГАМИЛЬТОНИАНУ И ИМПУЛЬСАМ АГРЕГИРУЮЩИМ ИНВАРИАНТОМ

(Представил Н. Алумяэ)

Найдены условия существования инварианта — линейной комбинации p, H. Неавтономная система преобразована в автономную, допускающую понижение порядка на две единицы. Предложена модификация принципа наименьшего действия и рассмотрена устойчивость стационарных движений. Получены агрегирующие инварианты и условия устойчивости равновесий некоторых гамильтоновых систем.

1. Рассмотрим неавтономную динамическую систему S Лагранжа

$$(p^{\cdot}_i+\partial H_1/\partial q_i-Q_i)\,\delta q_i=0 \quad (p_i=\partial L_1/\partial q^{\cdot}_i;\ q^{\cdot}_j=\partial H_1/\partial p_j,\ i,j=\overline{1,n}), \quad (1.1)$$

$$H_1(t,q,p)=p_jq^{\cdot}_j-L_1,\quad |\partial^2L_1/\partial q^{\cdot}_i\,\partial q^{\cdot}_j|\neq 0,\quad u_iv_i=\sum_{i=1}^{n}u_iv_i=u\cdot v,\quad f^{\cdot}=df/dt,$$

подчиненную идеальным связям, допускающим виртуальное перемещение:

$$\delta^0 q=\varepsilon\,\partial G_1/\partial p \qquad (G_1=v_0H_1+v_ip_i;\ v_0, v_i\in C_1(t), v_0\neq 0). \qquad (1.2)$$

С учетом (1.1), (1.2) функция $G_1[t,q(t),p(t)]$ удовлетворяет уравнению

$$G^{\cdot}_1=D(H_1)+W(Q)\Big(D(f)= =v_0\frac{\partial f}{\partial t}-v_i\frac{\partial f}{\partial q_i}+v^{\cdot}_0 f+v^{\cdot}_i p_i,\ W(Q)=\frac{\partial G_1}{\partial p}\cdot Q\Big). \qquad (1.3)$$

При $W(Q)\equiv 0$ функция G_1 будет инвариантом системы (1.1), (1.2) тогда и только тогда, когда H_1 удовлетворяет уравнению $D(H_1)=0$ на E^{2n+1}. Для этого необходимо и достаточно, чтобы G_1, H_1, L_1 в переменных t, x, p были функциями вида

$$G_1(t,q,p)=G(x,p),\ H_1(t,q,p)=H(t,x,p)=v_0^{-1}[G(x,p)-v_ip_i]\ (i=\overline{1,n}), \qquad (1.4)$$
$$L_1(t,q,q^{\cdot})=v_0^{-1}L(x,v_0x^{\cdot}),\ x=q+u,\ u=\int_0^t v_0^{-1}v\,d\tau\ (f(t,x,p)=f_1(t,x-u,p)).$$

Для натуральной системы S^+, обладающей инвариантом G_1, из (1.4) имеем

$$G(x,p)=1/2b_{ij}(x)p_ip_j+b_i(x)p_i+b_0(x),$$

$$L_1=1/2v_0a_{ij}(x)x^{\cdot}_ix^{\cdot}_j+a_i(x)x^{\cdot}_i+v_0^{-1}a_0(x),$$

$$\partial H_1/\partial t\neq 0 \quad \text{при} \quad v_i\,\partial H_1/\partial q_i\neq v^{\cdot}_0H_1+v^{\cdot}_ip_i.$$

Замечание 1. Приведем достаточные условия существования у $2(n+m)$-мерной идеальной системы S'' подсистемы S^+, удовлетворяющей (1.1), (1.2), (1.4) при $W(Q)\equiv 0$. Рассмотрим систему S'' с векторами $q''=(q_i,q'_\alpha)^*$, $Q''=(Q_i{}^1,Q'_\alpha)^*$, $i=\overline{1,n}$, и лагранжианом $L(t,q'',dq''/dt)$, образованную системами $S^1:\{q=(q_i)^*,\ Q^1=(Q_i{}^1)^*\}$ и $S':\{q'=(q'_\alpha)^*,\ Q'=(Q'_\alpha)^*\}$, $\alpha=\overline{n+1,n+m}$. Пусть известно движение $q'=f(t)$ массивной подсистемы S', независимое от движений S^1. Цилиндр $q'=f(t)$, $q'^{\cdot}=f^{\cdot}(t)$ — инвариантное множество C движений S''. Обозначим $Q=Q_0{}^1=Q^1(t,q,f,q^{\cdot},f^{\cdot})$, $L_0''=L''(t,q,f,q^{\cdot},f^{\cdot})$. При $L_0''\equiv L_1$ и совпадении на $q'=f(t)$ множеств $\{dq\}$, $\{\delta q\}$ для S^1 и S множества движений S и S^1 (на цилиндре C) совпадают. Следовательно, $S^1\in S^+$ на C, а функция G_1 — частный инвариант движений S'' на C, если удовлетворяются условия (1.2), (1.4), $W(Q)\equiv 0$.

Ниже ограничимся потенциальной голономной системой S^+ вида

$$q^{\cdot}_i=\partial H_1/\partial p_i,\quad p^{\cdot}_i=-\partial H_1/\partial q_i\quad (v_0\equiv 1,\ Q_i\equiv 0,\ i=\overline{1,n}),\tag{1.5}$$

$$H_1(t,q,p)=G_1-v_ip_i,\quad G_1(t,q,p)=G(x,p),\quad x=q+u,\quad u_i=\int_0^t v_i(\tau)\,d\tau.$$

Согласно (1.4), система (1.5) имеет инвариант G_1 и, обратно, если G_1 — инвариант системы (1.5), то она является системой S^+. Система (1.5) эквивалентна автономной канонической системе с гамильтонианом $G(x,p)$. Действительно, преобразование $x=\partial F/\partial p'$, $p=\partial F/\partial q=p'$, $F=p'\cdot(q+u)$ переводит (1.5) в автономную каноническую систему с гамильтонианом — инвариантом вида

$$x^{\cdot}=\partial G/\partial p,\quad p^{\cdot}=-\partial G/\partial x\,(G=G(x,p)=H'=H_1+\partial F/\partial t).\tag{1.6}$$

Следовательно, система (1.5) с инвариантом $G_1(t,q,p)$ преобразуется в автономную систему (1.6), для которой имеем равенства

$$L_1(t,q,q^{\cdot})=L(x,x^{\cdot})=p\cdot x^{\cdot}-G(x,p),\quad p=\partial L_1/\partial q^{\cdot}=\partial L/\partial x^{\cdot},\tag{1.7}$$

$$A^{-1}=B=B^*\quad (A=\|\partial^2L/\partial x^{\cdot}_i\,\partial x^{\cdot}_k\|,\ B=\|\partial^2G/\partial p_i\,\partial p_k\|,\quad i,k=\overline{1,n}).$$

Система S^+ вида (1.5) эквивалентна (1.6), допускающей понижение порядка на две единицы. Введем переменную $p_0=-G(x,p)$. При $x_n^{\cdot}=\partial G/\partial p_n\neq 0$ обозначим решение уравнения $p_0=-G(x_i,p_j,p_n)$ $(j=\overline{1,n-1})$ через $P(x_i,p_j,p_0)=-p_n$. Тогда для определения траекторий имеем $2(n-1)$-мерную каноническую систему и уравнение зависимости x, p от t вида

$$x'_j=\partial P/\partial p_j,\ p'_j=-\partial P/\partial x_j,\ t'=\partial P/\partial p_0\ (p'_0=-\partial P/\partial t=0,\ f'=df/dx_n).\tag{1.8}$$

При $x_i{}^\alpha=x_i(t_\alpha)=\text{const}$ и нефиксированных t_0,t_1 на траектории $y(\tau)$ системы

$$d(\partial K/\partial x'_j)/d\tau=\partial K/\partial x_j,$$

$$t'=-\partial K/\partial p_0\quad (y=(x_j)^*,\ \tau=x_n,\ p_0=\text{const},\ \alpha=0,1),\tag{1.9}$$

$$K(x, y', p_0) \equiv x'_j P_j(x, y', p_0) - P(x, P^1, p_0)$$
$$(x = (x_j, \tau)^*, \quad P^1 = (P_j)^*, \quad j = \overline{1, n-1}),$$

полученной из (1.8) решением уравнений $x'_j = \partial P/\partial p_j$ относительно p_j в пересечении областей определения P и $|\partial^2 P/\partial p_j \partial p_k| \neq 0$, стационарно действие типа Якоби

$$W = \int_{\tau_0}^{\tau_1} K(y, \tau, y', p_0)\, d\tau \qquad (\tau_\alpha = x_n(t_\alpha), y(\tau) \in C_2).$$

В случае $B = \|\partial^2 G/\partial p_s \partial p_\sigma\| > 0$ на R_0 для получения K исключим t' из (1.9) с помощью G

$$K = t' x^{\cdot}_i p_i = t'(L + G) = t'(L - p_0) = t'[L^1(x, y', t') - p_0]\ (x^{\cdot}_i = x'_i/t'),$$
$$L^1(x, y', t') \equiv L(x, y'/t', 1/t'), \quad p_n = -P, \quad R_0 = \{\partial G/\partial p_n \neq 0,\ G = -p_0\} \tag{1.10}$$
$$(i, s, \sigma = \overline{1, n}),$$
$$-G \equiv f(x, y', t') = L^1(x, y', t') + t'\, \partial L^1/\partial t' = L - x^{\cdot}_i\, \partial L/\partial x^{\cdot}_i = p_0,$$
$$b_{s\sigma} = \partial^2 G/\partial p_s\, \partial p_\sigma = \partial^2 H/\partial p_s\, \partial p_\sigma.$$

Из (1.7), (1.8), (1.10) в области R_0 находим неравенства

$$1/t' = \partial G/\partial p_n \neq 0, \quad A = B^{-1} > 0, \quad t'\, \partial f/\partial t' = \partial G/\partial p \cdot A\, \partial G/\partial p > 0, \quad \partial f/\partial t' \neq 0, \tag{1.11}$$

при которых уравнение $f = p_0$ имеет в некоторой окрестности точки $(x_0, y'_0, p_0)^*$ единственное решение $t' = T(x, y', p_0) \in C_1$. Подстановкой $t' = T$ в (1.10) находим $K(x, y', p_0)$, которая является функцией Рауса для лагранжиана $L_1{}^1(x, y', t') \equiv t' L^1(x, y', t')$. Действительно, из (1.10), (1.11) имеем

$$R(x, y', p_0) = L^1_1 - t'\, \partial L^1_1/\partial t' = L^1_1 - p_0 t' = K(x, y', p_0).$$

Из инвариантности экстремалей при замене переменных найдем для (1.5) две формы модификации принципа наименьшего действия. На движении $(t(x_n), q_j(x_n))^*$ интеграл

$$W_1 = \int_{\tau_0}^{\tau_1} K^1(t, \xi, \tau, t', \xi', p_0)\, d\tau\, (\xi = (q_j)^*, \ \xi' = d\xi/d\tau, \ dt/d\tau = t'),$$
$$K^1 = K(\xi + w, \tau, \xi' + t' w^{\cdot}, p_0)\ (\xi, t \in C_2(\tau), \ w =$$
$$= (u_j)^*, \ \tau = x_n = q_n + u_n(t), \ j = \overline{1, n-1})$$

имеет стационарное значение для всех кривых, удовлетворяющих условиям

$$q_j(\tau_\alpha) + u_j[t(\tau_\alpha)] = \overset{1}{c}_{j\alpha} = \mathrm{const}$$
$$(\tau_\alpha = \mathrm{fixconst}, \ \overset{1}{c}_\alpha = y(\tau_\alpha), \ q'_j = dq_j/d\tau, \ \alpha = 0, 1),$$
$$L^0 + t'(\partial L^0/\partial t' - u^{\cdot}_j\, \partial L^0/\partial q'_j) =$$
$$= p_0 (L^0(t, \xi, \tau, t', \xi') = L_1(t, q_j, \tau - u_n, \ q'_j/t', \ 1/t' - u^{\cdot}_n).$$

Обозначим $G^1(x, x^{\cdot}) = G(x, \partial L/\partial x^{\cdot})$. Из (1.10), используя Δ-вариацию ($\Delta F = \delta F + \Delta t dF/dt$), находим стационарность действия типа Лагранжа

$$W_2 = \int_{t_0}^{t_1} x^{\cdot}_i \, \partial L/\partial x^{\cdot}_i \, dt \qquad (F = F(t, x, x^{\cdot}),\ \partial L/\partial x^{\cdot}_i = p_i,\ i = \overline{1,n}) \quad (1.12)$$

при $G^1[x(t), x^{\cdot}(t)] \equiv x^{\cdot}_i \, \partial L/\partial x^{\cdot}_i - L(x, x^{\cdot}) = -p_0,\ x_i(t_\alpha) = x_{i\alpha} = \mathrm{const}$ на движении $x(t)$ системы (1.6). Действительно, из (1.7), (1.12) получаем равенства

$$\Delta G^1 = 0, \qquad (p \cdot \Delta x)\,|_0^1 \equiv p(t_1) \cdot \Delta x(t_1) - p(t_0) \cdot \Delta x(t_0) = 0,$$
$$\Delta W_2 = \Delta \int_{t_0}^{t_1} (L + G)\, dt = \Delta \int_{t_0}^{t_1} L\, dt - p_0 \Delta(t_1 - t_0) = (p \cdot \Delta x)\,|_0^1 = 0, \quad (1.13)$$

которые доказывают утверждение. В переменных t, q из (1.12), (1.13) имеем $\Delta W_3 = 0$, $W_3 = \int_{t_0}^{t_1} (q^{\cdot}_i + u^{\cdot}_i)\, \partial L_1/\partial q^{\cdot}_i \, dt\ (q^{\cdot}_i = dq_i/dt,\ i = \overline{1,n},\ \alpha = 0,1)$ при условиях $(q^{\cdot} + u^{\cdot}) \cdot \partial L_1/\partial q^{\cdot} - L_1 = -p_0$, $q(t_\alpha) + u(t_\alpha) = \mathrm{const}\,(u^{\cdot}(t_\alpha)\Delta t_\alpha = -\Delta q(t_\alpha))$.

2. Обозначим невозмущенное и возмущенное движения системы (1.6) через $x^1(t)$, $p^1(t)$, $\xi = x - x^1$, $\eta = p - p^1$ соответственно. Из равенств $q^1 = x^1 - u$, $\xi = q - q^1$ заключаем, что исследование устойчивости решения (1.5) по всем (некоторым) переменным сводится к аналогичной задаче для движения x^1, p^1-автономной системы (1.6). При этом точкам покоя (1.6) отвечают нестационарные движения (1.5), если $u^{\cdot} \not\equiv 0$. Канонические уравнения возмущений (1.5)

$$\xi^{\cdot} = \partial G^1/\partial \eta, \qquad \eta^{\cdot} = -\partial G^1/\partial \xi,$$
$$G^1 = G(x^1 + \xi, p^1 + \eta) - \xi \cdot \partial G/\partial x^1 - \eta \cdot \partial G/\partial p^1 - G(x^1, p^1) \quad (2.1)$$

имеют инвариант $V^1(t, \xi, \eta) = G(x^1 + \xi, p^1 + \eta) - G(x^1, p^1)$. Приведем достаточные условия устойчивости стационарных движений $x^1 = x^0 = \mathrm{const}$, $p^1 = p^0 = \mathrm{const}$, заданных равенствами

$$\partial G/\partial x^0 = \partial G/\partial p^0 = 0 \ \ (x^0 = (x^0_i)^*,\ p^0 = (p^0_j)^*,\ i,j = \overline{1,n}).$$

В новых обозначениях инвариант V^1 системы (2.1) имеет вид

$$V^1 = V(z) = G^1(z) = G(z^0 + z) - G(z^0), \qquad V(0) = 0,$$
$$z = (\xi_\alpha, \xi_\beta, \eta_j)^*, \quad z^0 = (x^0_i, p^0_j)^*, \quad y = (\xi_\beta, \eta_j)^*, \quad \xi' = (\xi_\alpha)^*, \quad \xi'' = (\xi_\beta)^*, \quad (2.2)$$
$$\alpha = \overline{1, k} \leqslant n, \quad \beta = \overline{k+1, n}, \quad k \geqslant 0, \quad i,j = \overline{1,n}.$$

Пусть $V(z)$ — y-определенно положительная функция. Тогда $\exists W \in C(y)$, $W(0) = 0$, $W > 0$, $y \neq 0$, $V \geqslant W$ на $|y| \leqslant \delta_0 = \mathrm{const}$ и стационарное движение x^0, p^0 устойчиво [1] по переменным x_β, p_i. Если S^+ — натуральная система, то инвариант (2.2) системы (2.1) будет определенно положительным по ξ_β, η_i^1

$$V(z) = 1/2\eta^1 B \eta^1 + P(x) - P(x^0), \quad \eta^1 = \eta + g(\xi), \quad g = A(x)\, b(x) - A(x^0)\, b(x^0), \quad (2.3)$$
$$P(x) = b_0(x) - 1/2 b(x) \cdot A(x)\, b(x), \quad g(0) = 0, \quad p^0 = -A(x^0)\, b(x^0), \quad x = x^0 + \xi,$$
$$B = A^{-1} = \| b_{ij}(x^0 + \xi) \|, \qquad G(x, p) = 1/2 b_{ij} p_i p_j + b_i p_i + b_0$$

при $\eta^1\cdot B\eta^1\geqslant b^0|\eta^1|^2\equiv W_1(\eta^1)$, $P(x)-P(x^0)\geqslant W_0(\xi'')$ $(0<b^0=\text{const})$, $W_0>0$, $\xi''\neq 0$, $W_0(0)=0$, $W_0(\xi'')\in C$, $0\leqslant|\xi''|\leqslant\delta_0=\text{const}$. Здесь $V\geqslant W\equiv W_0(\xi'')+W_1(\eta^1)$. Пусть $g_i(\xi)\to 0$ при $|\xi''|\to 0$ равномерно по ξ', а $g_i(\xi',0)\equiv 0$. Тогда из неравенств $|\eta_i|\leqslant|\eta_i^1|+|g_i|$ и непрерывности $g_i(\xi)$ следует устойчивость x^0, p^0 по переменным x_β, p_i. Если z^0 — изолированный минимум G, то x^0, p^0 устойчиво по всем переменным. Этот случай имеем при $\|\partial^2G/\partial z_s{}^0\partial z_\sigma{}^0\|>0$, где n неравенств выполняются в силу $B>0$, $z^0=(x_i{}^0,p_j{}^0)^*$, $s,\sigma=\overline{1,2n}$. Рассмотрим x^0, p^0-устойчивость Лагранжа по переменным x_β, p_i. Пусть при равномерности по $\xi'\in E^k$ имеем

$$G^1(z)\geqslant W^1(y),\ W^1\to+\infty \text{ при } |y|\to\infty\quad (W^1(y)\in C(E^{2n-k})). \qquad (2.4)$$

Тогда для любого решения (2.1) с началом в $|y(t_0)|\leqslant\text{const}$ предположение $\overline{\lim}\,|y(t)|=\infty$ противоречит условиям (2.4) и $G^1[\xi'(t),y(t)]=\text{const}$. Следовательно, x^0, p^0 относительно x_β, p_i устойчиво по Лагранжу. С учетом (2.3) условие (2.4) выполняется для натуральной (1.5), если

$$\min(e\cdot Be)\geqslant\beta_0=\text{const},\quad |e|=1;\quad |Bg|\leqslant\gamma_0=\text{const}\quad (g=g(\xi)),\qquad (2.5)$$

$$P(x^0+\xi)\geqslant P_1(\xi'')\in C;\quad P_1(\xi'')\to+\infty,\ |\xi''|\to\infty\ (\xi\in E^n).$$

y-компонента любого решения (2.1) ограничена, так как в случае (2.5) функция $W_0{}^1(y)=1/2\beta_0|\eta|^2-\gamma_0|\eta|+P_1(\xi'')-P(x^0)$ удовлетворяет (2.4).

Замечание 2. Все ранее сказанное в пп. 1 и 2 справедливо и для случая неавтономной системы Гамильтона S_+ с инвариантом $G_+=H(t,q,p)+h\cdot p$, где $h=(h_i)^*=h(q_\alpha)$, $h_\alpha\neq 0$, $\partial h/\partial q_\beta\equiv 0$, $\beta\neq\alpha\in 1,n$. Действительно, вводя переменные x, p' равенствами

$$x=\partial f/\partial p',\ p=\partial f/\partial q,\ f\equiv g\cdot p=\sum_{s=1}^{n} g_sp_s,$$

$$g_\alpha=t+\int_{q_\alpha^0}^{q_\alpha} h_\alpha^{-1}(\xi)\,d\xi,\quad g_\beta=q_\beta-\int_{q_\alpha^0}^{q_\alpha} h_\alpha^{-1}(\xi)\,h_\beta(\xi)\,d\xi\quad (\alpha\neq\beta=\overline{1,n}),$$

получим аналогичную (1.6) автономную систему

$$dx/dt=\partial G/\partial p',\quad dp'/dt=-\partial G/\partial x\quad (G=G(x,p')=G_+(t,q,p)).$$

3. Примеры. С учетом замечания 1 рассмотрим аналогичную [2] систему S^1, состоящую из воздействующей S'-системы M центров, вращающихся вокруг $o\beta$ с $\Omega_0=\text{const}\geqslant 0$, $r_\nu^{\cdot}=\Omega_0\beta\times r_\nu$ $(\nu=\overline{1,M})$, и свободной системы из N точек S^+ с функцией внутренних и внешних сил — потенциалом позиционных и электромагнитных взаимодействий вида

$$L_0(r')+\sum_{s=1}^{N} a_s(r')\cdot r'^{\cdot}_s,$$

$$L_0=\sum_{\nu,s}^{M,N} f_{\nu s}(\varrho_{\nu\alpha},\varrho_{s\alpha},\varrho_{\nu s})+\sum_{s\neq\sigma}^{N} f_{s\sigma}(\varrho_{\nu\alpha},\varrho_{\sigma\alpha},\varrho_{s\sigma})\ (\alpha=1,2),$$

$$\varrho_{i1}=|r_i|,\quad \varrho_{i2}=r_i\cdot\beta,\quad \varrho_{ij}=|r_i-r_j|,$$

$$r'=(r'_s)^*,\quad r'^{\cdot}_s=r_s-\Omega_0\beta\times r_s,\quad \beta=\text{const},\quad |\beta|=1;\quad s,\sigma=\overline{1,N}.$$

В силу результатов пп. 1 и 2, система S^+ имеет инвариант движения

$$G(r', p') = 1/2m_s r_s^2 - L_0 - \Omega_0\beta\cdot(M^+ + m^+),$$

$$M^+ = r_s \times m_s r^{\cdot}_s, \qquad m^+ = r'_s \times a'_s. \tag{3.1}$$

Подслучаем этого случая будет гиростат S Жуковского, если S' — массивный гиростат $S_0(M_1/M_0 \ll 1)$, вращающийся вокруг β с $\Omega_0 = \text{const} \geqslant 0$. Ниже для простоты примем $L_1 = a'(r')\cdot r'^{\cdot} + a''(\lambda')\omega$ $(\omega' = \omega - \Omega_0\beta)$, где r', λ' — координаты центра масс и ориентации S_1 относительно неподвижного в S_0 триэдра $oe_1e_2\beta$. Из (3.1) с учетом обозначений [2] находим инвариант поступательно-вращательного движения S_1 относительно S_0 в виде его гамильтониана

$$H = G(r', \lambda', p) = H'(r', p', \lambda') + H''(\lambda', p'', r') - V(r', \lambda')$$

$$(p = (p'_i, p''_j)^*, \quad i, j = \overline{1,3}, \quad Q_k \equiv 0), \tag{3.2}$$

$$H' = 1/2M_1[r'^{\cdot 2} - \Omega_0^2(\beta\times r')^2] + V \qquad (\omega = \omega' + \Omega_0\beta,\ r^{\cdot} = r'^{\cdot} + \Omega_0\beta\times r),$$

$$H''_{(\beta)} = T_2 + V - \Omega_0\beta\cdot K, \quad 2T_2 = \omega\cdot C\omega + I_k^{-1}r_k^2,$$

$$K = G\omega + k + a'', \quad C = G - g \quad (\overline{00_1 = r}),$$

$$r_k = I_k[(\omega\cdot i_k) + \alpha^{\cdot}_k] = \text{const},$$

$$g = \|g_{\alpha\beta}\|, \quad g_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{\rho} I_k(i_{k\alpha}\cdot i_{k\beta})\ (\alpha, \beta = \overline{1,3},\ k = 1, \varrho),$$

$$k = \sum_{k=1}^{\rho} I_k\alpha^{\cdot}_k i_k, \quad l = g\omega + k = \sum_{k=1}^{\rho} r_k i_k, \quad L = 1/2M_1 r^{\cdot 2} + T_2 + L_1 - V,$$

$$p' = \partial L/\partial r'^{\cdot}, \quad p'' = \partial L/\partial\lambda'^{\cdot},$$

где i_k — орты твердых и жидких роторов, фиксированных в $o_1e'_1e'_2e'_3$ — главном триэдре S_1. Из допущения у S_1 инвариантных множеств $r' = r'_*[t]$, $r'^{\cdot} = r_*'^{\cdot}[t]$ в ограниченной задаче при $V_* \not\equiv V_0^*[t] + V_1^*(\lambda')$ следует ошибочный вывод о существовании на $r' = r'_*$ инварианта вращения S_1 в виде $H_*'' + T'_*[t]$ $(H_*'' \equiv H''|r' = r'_*,\ T'_* = T'|r' = r'_*)$. Аналогичные пп. 1, 2 и замечанию 2 результаты [3] получим для подсистемы вращения S_1^* с инвариантом $G = g_0H_*'' + g_ip_{i*}''$ вращения S_1 при $r' = r'_*[t]$ $(g_j = g_j(t, \lambda'),\ j = \overline{0,3})$. В частности, рассмотрим круговое движение центра масс S_1 $(|r_*| = r_0 = \text{const},\ \omega_r = \omega_0 n = \text{const},\ \omega_0 = \text{const},\ M_1/M_0 \ll 1)$, когда оси симметрии $o\beta$ и вращения с $\Omega_0(t) \sim 0$ гравитирующего сфероида S_0 совпадают и выполняются условия

$$\varepsilon_1 = R_1 r_0^{-1} \ll 1, \quad |\varepsilon_2| \equiv |C_0 - A_0| M_0^{-1} R_0^{-2} \ll 1, \quad a'' = a''(n, \gamma).$$

При $\tilde V_*$-асимптотике V_* с ε_1^2, ε_2-членами [2] из (3.2) находим G-инвариант

$$H''_{n*} \simeq G = T_2 + \tilde V^1_* - \omega_0 n\cdot K, \quad L'' = T_2 + a''\cdot\omega - V_* \ (K = G\omega + k + a''), \tag{3.3}$$

$$-\tilde V_* = \mu r_0^{-1}\left\{ M_1\left[1 - \frac{\varepsilon_2 R_0^2(1 - 3s^2)}{2r_0^2}\right] - \frac{3\varepsilon_1^2}{2R_1^2}[\gamma\cdot G\gamma - 1/3\delta_{ij}G_j]\right\} \ (i, j = \overline{1,3}).$$

$$s^2(t)=\sin^2\alpha_0\cos^2[\omega_0(t-t_0)+c_0],\ \cos\alpha_0\equiv n\cdot\beta,\ \gamma=\gamma_i e'_i=r/r_0,\ \overset{1}{V_*}\equiv V_*|_{s=0}.$$

Замечание 3. При круговом движении $r_*[t]$ и произвольной функции $V(t, r', \lambda')$ для инвариантности H_{n*}'' необходимо и достаточно, чтобы $V_* = V_0^*[t] + V_1^*(\gamma, n)$. Отсюда в случае трехосного S_0 при главном резонансе $\beta = n$, $\Omega_0 = \omega_0$ сохраняется гамильтониан вращения S_1 относительно орбитной системы координат $o_1\gamma\tau n$.

$$H_*''=G=T_2-\omega_0\beta\cdot K+V_*(V_*=V_1^*(\gamma,\beta)\equiv V(r',\lambda')\,|_{r=r_*},\ V_0^*\equiv0).$$

В связи с (3.2), (3.3) рассмотрим систему, для которой $H = H(\zeta, \varepsilon)$ — голоморфная по ε функция; решения и инвариант H — ε-аналитичны и представимы в $t \geqslant t_0$, $|\zeta| < \infty$ равномерно сходящимися рядами

$$\zeta=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\zeta_k(t),\quad H(\zeta,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k H_k(t,\zeta_k),$$

$$H=H'_0(x,p)+H''_0(\xi,\psi)+\varepsilon^2V(x,\xi,\varepsilon),\tag{3.4}$$

$$H_0=H'_0+H''_0,\quad V=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^kV_k(x,\xi),\quad \zeta=(y_s,z_\sigma)^*,$$

$$y=(x_i,p_j)^*,\quad z=(\xi_i,\psi_j)^*\quad (s,\sigma=\overline{1,2n};\ i,j=\overline{1,n}).$$

Так как при $k \geqslant 1$ в (3.2), (3.3) $V_k(x, \xi)$ плохо известны, то имеет смысл ограничиться ε^2-приближениями $\tilde\zeta_2 \equiv \zeta_0 + \varepsilon^2\zeta_2 \simeq \zeta$, $\tilde H_2 \equiv H_0 + \varepsilon^2 H_2 \simeq H$, где

$$\dot x_0=\partial H'_0/\partial p_0,\quad \dot p_0=-\partial H'_0/\partial x_0,\quad \dot\xi_0=\partial H''_0/\partial\psi_0,\quad \dot\psi_0=-\partial H''_0/\partial\xi_0,\tag{3.5}$$

$$\dot x_2=\partial l'_0/\partial p_0,$$

$$\dot p_2=-\partial l'_0/\partial x_0-k\sim \dot y_2=Ay_2+f\ \ (l'_0\equiv y_2\cdot\nabla H'_0(y_0),\ k\equiv\partial V_0/\partial x_0),$$

$$\dot\xi_2=\partial l''_0/\partial\psi_0,$$

$$\dot\psi_2=-\partial l''_0/\partial\xi_0-h\sim \dot z_2=Bz_2+g\ \ (l''_0\equiv z_2\cdot\nabla H''_0(z_0),\ h\equiv\partial V_0/\partial\xi_0).$$

Пусть (как в случае (3.3), $a'' = \mathrm{const}$) для (3.5) известно решение $\zeta_0[t, \zeta_0(t_0)]$. Тогда, согласно теореме Пуанкаре, известны матрицанты, ζ_2-решение и реальный ε^2-асимптотический инвариант достоверной части системы (3.4)

$$y_2=Yy_{20}-\int_{t_0}^{t}Y_2^-k\,d\tau,\quad Y(t_0,t_0)=I,\quad Y^{-1}=\|Y_1^-\ Y_2^-\|,\quad \zeta_2(t_0)=\zeta_{20},\quad XX^{-1}=I,$$

$$z_2=Zz_{20}-\int_{t_0}^{t}Z_2^-h\,d\tau,\quad Z(t_0,t_0)=I,\quad Z^{-1}=\|Z_1^-,Z_2^-\|,\tag{3.6}$$

$$\zeta(t_0)=\zeta_0(t_0),\quad \overset{0}{\zeta_2}=\zeta_2|_{h=0}^{k=0},$$

$$H=H_0(\zeta_0)+\varepsilon^2[\zeta_2\cdot\partial H_0/\partial\zeta_0+V_0(x_0,\xi_0)]+o(\varepsilon^2)=$$

$$=H_0(\tilde\zeta_2)+\varepsilon^2V_0(x_0,\xi_0)+o(\varepsilon^2),$$

$$H_0[\zeta_0(t)]=\mathrm{const};\quad \overset{0}{\zeta_2}\cdot\partial H_0/\partial\zeta_0=\mathrm{const},\quad H\simeq\tilde H_2\equiv H_0(\tilde\zeta_2)+\varepsilon^2V_0(\tilde x_2,\tilde\xi_2),$$

$$P(t)-P(t_0)=(x_0\cdot\partial V_0/\partial x_0)\,\Big|_t^{t_0}+\int_{t_0}^{t} x_0\cdot(\partial V_0/\partial x_0)^{\cdot}\,d\tau,\qquad P\equiv y_2\cdot\partial H'_0/\partial y_0.$$

Из (3.5), (3.6) выводим необходимое и достаточное условие независимости $\tilde{y}_2$ от $\tilde{z}_2$ (или $\tilde{z}_2$ от $\tilde{y}_2$), эквивалентное ε^2-инвариантности y (или z) вида

$$\partial^2 V_0/\partial\xi\,\partial x_0=\partial[\partial V_0(\xi,x_0)/\partial x_0]/\partial\xi\equiv 0\,(\partial^2 V_0/\partial x\,\partial\xi_0\equiv 0).\qquad(3.7)$$

Вдоль $x_0(t)$, удовлетворяющего (3.7), согласно (3.6) z-подсистема (3.4) имеет ε^2-асимптотический инвариант $H''_0(\xi,\psi)+\varepsilon^2 V_0[x_0(t),\xi]+H'_0(\tilde{y}_2)$.

Рассмотрим устойчивость ν-стационарного вращения $o_1e'_i$ вокруг $o_1\gamma\tau n$ в случае (3.3), где $V=V_0{}^*[t]+V_1{}^*(\gamma,n)$, $a''=\mathrm{const}$. Ориентацию $o_1e'_i$ к $o_1\gamma\tau n$ зададим матрицей $\|\alpha_{ij}[\lambda(\nu)]\|$, где ν_i — новые переменные без особенности в $\theta=2\pi N$, для которых $V_1{}^*\equiv P(\alpha_{ij})/P_0(\alpha_{ij})$ переходит в дробно-рациональную функцию от $\nu=(\nu_i)^*$:

$$\begin{array}{c|ccc}
 & \gamma & \tau & n\\ \hline
e'_1 & \lambda_0^2+\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2 & 2(\lambda_0\lambda_3+\lambda_1\lambda_2) & 2(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2)\\
e'_2 & 2(\lambda_1\lambda_2-\lambda_0\lambda_3) & \lambda_0^2+\lambda_2^2-\lambda_1^2-\lambda_3^2 & 2(\lambda_0\lambda_1+\lambda_2\lambda_3)\\
e'_3 & 2(\lambda_0\lambda_2+\lambda_1\lambda_3) & 2(\lambda_2\lambda_3-\lambda_0\lambda_1) & \lambda_0^2+\lambda_3^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2
\end{array}\qquad
\begin{array}{l}\lambda_0=(|\nu|^2-1)(1+|\nu|^2)^{-1}\\ \lambda_j=2\nu_j(1+|\nu|^2)^{-1}\\ i,j=\overline{1,3}\end{array}\qquad(3.8)$$

$$\nu_1=v_0\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\qquad \nu_2=v_0\sin\varphi_1\sin\varphi_2,\qquad \nu_3=v_0\cos\varphi_1\sin\varphi_3,$$

$$v_0=(1-\cos\varphi_1\cos\varphi_3)^{-1},$$

$$2\varphi_1=\theta,\qquad 2\varphi_2=\psi-\varphi,\qquad 2\varphi_3=\psi+\varphi.$$

В переменных ω,ν уравнения вращения S_1 и инвариант (3.3) имеют вид

$$K^{\cdot}+\omega\times K+B^*\nabla_\nu V=0,\ \nu^{\cdot}=B\omega'\ (K=\partial T/\partial\omega=C\omega+b,\ T\equiv T_2+a''\cdot\omega),\qquad(3.9)$$

$$4B=\begin{Vmatrix}\nu_2^2+\nu_3^2-\nu_1^2-1, & -2(\nu_1\nu_2+\nu_3), & -2(\nu_1\nu_3-\nu_2)\\ 2(\nu_3-\nu_1\nu_2), & \nu_1^2+\nu_3^2-\nu_2^2-1, & -2(\nu_1+\nu_2\nu_3)\\ -2(\nu_2+\nu_1\nu_3), & 2(\nu_1-\nu_2\nu_3), & (\nu_1^2+\nu_2^2-\nu_3^2-1)\end{Vmatrix}\qquad \begin{array}{l}\det B\neq 0,\ b=l+a''=\epsilon_0,\\ \omega=\omega'+\omega_0 n,\\ (\partial T/\partial\alpha^{\cdot}_k)^{\cdot}=Q_k\equiv 0,\end{array}$$

$$G=R_2+W=1/2\Big[\omega'\cdot C\omega'+\sum_{k=1}^{\rho} r_k^2 I_k^{-1}+\omega_0^2 W_0(\nu,\,c)\Big],$$

$$W_0=\omega_0^{-2}P-n\cdot Cn-2(c\cdot n),$$

$$P=2V_1^*(\nu),\ 2\bar{V}^1_*=3\omega_0^2\,(\gamma\cdot G\gamma),$$

$$c\equiv b/\omega_0,\qquad \omega_0=\omega_0(r_0,\varepsilon_2,\alpha_0)=\mathrm{const},\qquad r_k=\mathrm{const}.$$

Из (3.9) и стационарности G по ν находим искомое вращение ω'^0,ν^0 лишь в виде относительного равновесия $\omega'_0=0$, $\nu^0=\nu_0=\mathrm{const}$. Необходимо и достаточно, чтобы параметры c,ν^0 удовлетворяли линейной по c системе уравнений

$$Ac=a,\qquad A=\|a_{ij}\|,\qquad a_{ij}=\partial n_j/\partial\nu_i^0,$$

$$\det A\equiv 0,\qquad a=1/2\nabla_\nu\Phi(\nu^0),\qquad \Phi\equiv\omega_0^{-2}P-n\cdot Cn,\qquad(3.10)$$

$$A\varrho^3/4=\left\|\begin{matrix} 2[\varrho(\nu_3+\nu_1\nu_2)-4\nu_1^2\nu_3]+\Delta_1, & [\varrho(\varrho-2\nu_1^2)-8\nu_1\nu_2\nu_3]+\Delta_2, & 4\nu_1(\nu_1^2+\nu_2^2-\nu_3^2-1) \\ [\varrho(2\nu_2^2-\varrho)-8\nu_1\nu_2\nu_3]+\Delta_3, & 2[\varrho(\nu_3-\nu_1\nu_2)-4\nu_2^2\nu_3]+\Delta_4, & 4\nu_2(\nu_1^2+\nu_2^2-\nu_3^2-1) \\ 2[\varrho(\nu_1+\nu_2\nu_3)-4\nu_1\nu_3^2]+\Delta_5, & 2[\varrho(\nu_2-\nu_1\nu_3)-4\nu_2\nu_3^2]+\Delta_6, & 8\nu_3(\nu_1^2+\nu_2^2) \end{matrix}\right\|$$

$$\times(\varrho=1+|\nu^2|),$$

$$\Delta_1=-8\nu_1\nu_2,\quad \Delta_2=8\nu_1^2-2\varrho,\quad \Delta_3=2\varrho-8\nu_2^2,\quad \Delta_4=-\Delta_1,$$

$$\Delta_5=-8\nu_2\nu_3,\quad \Delta_6=8\nu_1\nu_3,$$

адекватной безусловной стационарности W_0 в ν^0, где $\partial W_0/\partial\nu^0=0$. Обозначим

$$A^+=\|A,a\|,\quad r(M)=\operatorname{rank} M,\quad R^{(\delta)}=\{\nu\,|\,r(A)=r(A^+)=\delta\},$$

$$R^+=\bigcup_{\delta}R^{(\delta)},\ R^{(\delta_1)}\cap R^{(\delta_2)}=\varnothing,$$

$\delta_1\neq\delta_2$; $\delta,\delta_1,\delta_2=\overline{0,2}$. Для существования решения (3.10) необходимо и достаточно $\nu^0\in R^+$, где R^+ — допустимое множество $\{\nu^+\}$. Следует различать $R^{(\delta)}$. Из (3.8), (3.10) в случаях $\nu^0\in R^{(\delta)}$ находим, что все решения дают формулы

$$c_0^{(0)}=\mu_1 n+\mu_2\gamma+\mu_3\tau,\qquad c_0^{(1)}=\mu_1 n+\mu_2 g+\alpha_3(n\times g),\qquad c_0^{(2)}=\mu_1 n+\alpha_1\tau+\alpha_2\gamma$$

$$(An=0),\qquad (3.11)$$

где $Ag=0$, $g\cdot n=0$, $|g|=1$, μ_i — произвольные, α_i — фиксированные постоянные. Из (3.10), (3.11) для (3.3) (например, при гравитирующих S_0, S_1) имеем два следствия. Неравенство $l+a''\neq 0$ — одна из причин несовпадения триэдров $o_1\gamma\tau n$ и $o_1 e_i'$. При этом выбором c невозможно получить произвольную стационарную ориентацию триэдров, так как в общем случае $R^+\neq E^3$. Параметры скрытого движения c_i неоднозначно определены параметрами ν_j^0 реального наклона триэдров.

Возьмем из (3.4) любое решение $c_0^*=c_0(\nu^0)\in\{c_0^{(\delta)}\}$ в допустимой точке ν^0. По теореме Ляпунова для безусловной устойчивости $\nu=\nu^0$, $\omega'=0$ достаточно, чтобы $W_0(\nu, c_0^*)$ имела в ν^0 изолированный минимум. В обыкновенной точке $\nu_0^0(|\partial^2 W_0(\nu_0^0, c_0^*)/\partial\nu_i\partial\nu_j|\neq 0)$ грубый критерий такой устойчивости дают условия Сильвестра $D_i(\nu_0^0, c_0^*)>0$, $i,j=\overline{1,3}$. В последнем случае для неустойчивости $\nu_0^0, 0$, согласно теореме Томсона, достаточно, чтобы в точке ν_0^0, c_0^* нечетное число этих неравенств изменило знак. Произвол μ_i можно подчинить условию смены устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В. В., Вестн. Моск. ун-та, Матем. Мех., № 4, 38—52 (1957).
2. Кейс И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 24, № 3, 277—284 (1975).
3. Кейс И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 28, № 1, 83—85 (1979).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
29/XII 1979

I. KEIS

HAMILTONIAANI JA IMPULSSIDE POOLEST LINEAARSE AGREGEERIMISVARIANDIGA LAGRANGE'i SÜSTEEMI DÜNAAMIKAST

On leitud invariandi G olekutingimused, kui G kujutab endast impulsside ja hamiltoniaani lineaarset kombinatsiooni holonoomsete ning mitteholonoomsete süsteemide jaoks. G-invariandiga mitteautonoomne kanooniline süsteem on teisendatud Hamiltoni autonoomsesse süsteemi. Esitatakse minimaalse mõju printsiibi modifikatsioon. Agregeerimisvariant on leitud sferoidi mittetsentraalses gravitatsiooniväljas ning orbiidil liikuva süsteemi jaoks.

I. KEIS

ON THE DYNAMICS OF LAGRANGE SYSTEM WITH THE AGGREGATING INVARIANT LINEAR IN HAMILTONIAN AND THE IMPULSES

Under the conditions

$$\delta^0 q \overset{\triangle}{=} \varepsilon(v + v_0 q^{\cdot}) \in \{\delta q\}, \quad Q \cdot \delta^0 q = 0 \, (f^{\cdot} = df/dt, \ v = (v_k)^*),$$

$$v \cdot \partial H/\partial q - v_0 \, \partial H/\partial t = v^{\cdot}_0 H + v^{\cdot} \cdot p \, (u \cdot v = \sum_{k=1}^{n} u_k \cdot v_k, \ k = \overline{1,n})$$

the ideal holonomic and non-holonomic Lagrange systems obtain the generalized energy invariant $G \overset{\triangle}{=} v_0 H + v \cdot p = \text{const}$. In the new variables x, p' (1.5) every canonic system with G-invariant is decomposed and represented in the form of $2(n-1)$-dimensional canonic system independent of the two equations on x_n, x_{n+1}. The generalized Maupertuis-Lagrange principle is proposed for this system. Various gyrostatic systems have this type of invariant and all the properties noted above. As an example, the aggregating invariant is obtained for the circular gyrostate motion around the gravitating spheroid. The sufficient stability conditions for relative equilibrium are derived in the essentially new attitude parameters ν_i (3.8).