EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 29. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1980, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 29
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1980, № 2

УДК 519.95:330.115

М. КАГАНОВИЧ

О СХОДИМОСТИ ТРАЕКТОРИЙ СКОЛЬЗЯЩЕГО ПЛАНИРОВАНИЯ В ДИНАМИЧЕСКОЙ МЕЖОТРАСЛЕВОЙ МОДЕЛИ

(Представил Н. Алумяэ)

Рассмотрим динамическую модель

$$Ax_t \leqslant x_{t-1}, \quad x_t \geqslant 0, \quad t=1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где A — примитивная матрица технологических коэффициентов размерности $n \times n$, x_t — вектор выпусков в момент t. Оптимальными назовем траектории, максимизирующие величину $u(x_T)$ на множестве допустимых траекторий $\{x_t\}_0{}^T$ при некотором фиксированном векторе начальных запасов $x_0 \geqslant 0$, где u — любая монотонно возрастающая (т. е. $u(x) > u(y)$, если $x > y$) функция полезности, T — плановый горизонт. Пусть α — максимальное по модулю собственное число матрицы A, $\hat{x}$ и p — соответствующие ему нормированные правый и левый собственные векторы. По теореме Фробениуса—Перрона $\hat{x} > 0$, $p > 0$.

В [1] для модели вида (1) определено понятие процесса скользящего (непрерывного) планирования: пусть $\{x_t(0)\}_0{}^T$ — произвольная оптимальная траектория при начальных запасах, равных x_0; из точки $x(1) = x_1(0)$, как начального состояния, вычисляем новую оптимальную траекторию $\{x_t(1)\}_0{}^T$, где $x_0(1) = x(1)$, и положим $x(2) = x_1(1)$. Продолжая процесс таким же образом, получим траекторию $\{x(\tau)\}_0{}^\infty$ с начальным состоянием $x(0) = x_0$, именуемую траекторией скользящего планирования или скользящим планом.

Из доказанного в [2] следует, что для любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ всякая траектория скользящего планирования с достаточно длинным плановым горизонтом, исходящая из фиксированного начального состояния $x_0 > 0$, полностью лежит начиная с некоторого момента в конической ε-окрестности неймановского луча, т. е. в данном случае луча, порождаемого вектором $\hat{x}$. В то же время в [1] приведен пример, показывающий, что, вообще говоря, траектория скользящего планирования может не сходиться к стационарному состоянию.

В настоящей работе сходимость (в смысле пропорций) скользящих планов к неймановскому лучу доказывается при некотором условии, налагаемом на принцип их составления, а именно: пусть оптимизация в (1) состоит в максимизации выпуска в конечный момент T при фиксированных пропорциях продуктов, соответствующих исходному состоянию, т. е. на k-й итерации процесса скользящего планирования решается задача

$$\max\{\gamma \mid Ax_t(k) \leqslant x_{t-1}(k),\ x_t(k) \geqslant 0,\ t=1, \ldots, T; \\ x_T(k) \geqslant \gamma x(k)\},\ k=0, 1, \ldots . \tag{2}$$

Теорема. *Пусть $\{x(\tau)\}_0^\infty$ — произвольная траектория скользящего планирования в задаче* (2), *исходящая из некоторой точки $x_0 > 0$. Если плановый горизонт T достаточно велик (не менее некоторого T'), то найдется число $c > 0$ такое, что*

$$\alpha^\tau x(\tau) \xrightarrow[\tau\to\infty]{} c\hat{x}. \tag{3}$$

Обозначим символом $\|\cdot\|$ норму в пространстве R_+^n, $\varrho(x, y) = \Big\| x/\|x\| - y/\|y\| \Big\|$ — угловое расстояние между векторами x и y, $q(x) = \min\limits_{i=1, \ldots, n} x^{(i)}/\hat{x}^{(i)}$ для $x \geqslant 0$. Поскольку $p > 0$, то для $x \geqslant 0$ можно, не умаляя общности, считать $\|x\| = px$. Для простоты, также не умаляя общности, положим $\alpha = 1$. Зададимся некоторым малым $\varepsilon > 0$. В [2] доказано, что найдется натуральное $T(\varepsilon)$ такое, что если плановый горизонт $T \geqslant T(\varepsilon)$, то $\varrho(x(\tau), \hat{x}) < \varepsilon$ для всех τ начиная с некоторого номера $\tau(\varepsilon)$.

Легко доказать, что для любого $\delta > 0$ найдется натуральное число $N(\delta)$ такое, что $\varrho(A^{N(\delta)}x, \hat{x}) < \delta$ для любого $x \geqslant 0$. Известно, что норма матрицы A^t стремится к единице при $t \to \infty$, поэтому существует L такое, что $\|A^t\| \leqslant 2$ для* $t \geqslant L$. Положим $N = \max\{N(\varepsilon), L\}$. Будем далее считать, что $T \geqslant T' = \max\{T(\varepsilon), N+1\}$.

Лемма 1. *Найдется константа $a > 0$, не зависящая от выбора ε такая, что для любого $x \geqslant 0$ выполняется $\varrho(A^N x, \hat{x}) \leqslant a\varepsilon\varrho(x, \hat{x})$.*

Доказательство. Очевидно, что найдется положительная константа b такая, что для любого вектора y справедливо $\sum\limits_{i=1}^n |y^{(i)}| \leqslant b\|y\|$. Обозначим $m(\hat{x}) = \min\limits_{i=1, \ldots, n} \hat{x}^{(i)}$, $d = \varrho(x, \hat{x})$, $\beta(d) = 1 - bd/m(\hat{x})$. Поскольку $\varrho(A^N x, \hat{x}) \leqslant \varepsilon$ для всех $x \geqslant 0$, то, не умаляя общности, можно считать, что $d < m(\hat{x})/2b$. В противном случае достаточно взять $a \geqslant 2b/m(\hat{x})$.

Очевидно, вектор $x \geqslant 0$ можно представить в виде $x = \beta(d)\|x\|\hat{x} + e$, где $e \geqslant 0$, $\|e\| = bd\|x\|/m(\hat{x})$, так что $A^N x = \beta(d)\|x\|\hat{x} + A^N e$. Аналогично, так как $\varrho(A^N e, \hat{x}) \leqslant \varepsilon$ и $\|A^N\| \leqslant 2$, то $A^N e = \beta(\varepsilon)\|A^N e\|\hat{x} + e'$, где $e' \geqslant 0$, $\|e'\| = b\varepsilon\|A^N e\|/m(\hat{x}) \leqslant b\varepsilon\|A^N\|\|e\|/m(\hat{x}) \leqslant 2\varepsilon b^2 d\|x\|/(m(\hat{x}))^2$. Итак, поскольку по соглашению норма аддитивна на R_+^n и $\beta(d) > 1/2$, имеем

$$\varrho(A^N x, \hat{x}) = \left\| \frac{\beta(d)\|x\|\hat{x} + \beta(\varepsilon)\|A^N e\|\hat{x} + e'}{\beta(d)\|x\| + \beta(\varepsilon)\|A^N e\| + \|e'\|} - \hat{x} \right\| \leqslant \frac{2\|e'\|}{\beta(d)\|x\|} \leqslant \frac{8\varepsilon b^2 d}{(m(\hat{x}))^2},$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что упомянутую выше величину $N(\delta)$ можно определить как функцию $N(\delta) = \min\{t \geqslant 0 \mid \sup\limits_{x \geqslant 0} \varrho(A^t x, \hat{x}) \leqslant \delta\}$.

---

* Символом $\|\cdot\|$ будем пользоваться и для обозначения матричной нормы.

Лемма 2. $\delta N(\delta) \underset{\delta \to 0}{\to} 0$.

Доказательство. Фиксируем некоторое значение $\delta_0 \in (0, \varepsilon)$, причем $\delta_0 < 1/a$, и положим $N_0 = N(\delta_0)$. Для любого $x \geqslant 0$ имеем $\varrho(A^{N_0}x, \hat{x}) \leqslant \delta_0$, следовательно, по лемме 1 $\varrho(A^{2N_0}x, \hat{x}) \leqslant a\delta_0^2$ для $x \geqslant 0$, аналогично

$$\varrho(A^{kN_0}x, \hat{x}) \leqslant a^k\delta_0^{k+1} \text{ для всех } x \geqslant 0,\ k = 1, 2, \ldots . \tag{4}$$

Ясно, что для любого $\delta \in (0, \delta_0)$ найдется натуральное $k(\delta)$ такое, что $\delta \in (a^{k(\delta)}\delta_0^{k(\delta)+1}, a^{k(\delta)-1}\delta_0^{k(\delta)}]$. Тем самым, по определению $N(\delta)$ и в силу (4), $N(\delta) \leqslant k(\delta)N_0$. Таким образом, $\delta N(\delta) \leqslant$ $\leqslant a^{k(\delta)-1}\delta_0^{k(\delta)}k(\delta)N_0$. Стремление δ к нулю означает, что соответствующее $k(\delta) \to \infty$. Отсюда, поскольку $\delta_0 < 1/a$, имеем $\delta N(\delta) \underset{\delta \to 0}{\to} 0$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы. Обозначим $\sigma = ab\varepsilon/\min \hat{x}^{(i)}$. Не умаляя общности, предположим, что исходное ε выбрано настолько малым, что (по лемме 2)

$$\sigma N \leqslant 1/32. \tag{5}$$

Вернемся к рассмотрению траектории $\{x(\tau)\}$. Возьмем произвольный момент $t \geqslant \tau(\varepsilon)$ и положим $d_0 = \max\limits_{s=t, \ldots, t+N-1} \varrho(x(s), \hat{x})$. Как отмечалось, $d_0 \leqslant \varepsilon$. Пусть $\gamma(t)$ — максимальное значение функционала в задаче (2) с начальным запасом, равным $x(t)$, так что соответствующий оптимальный выпуск в конце планового периода $x_T(t) \geqslant \gamma(t)x(t)$. Отсюда, по определению скользящего плана, в силу (1), леммы 1 и так как $\|x\| = px$, имеем

$$x(t+1) \geqslant A^{T-1}x_T(t) \geqslant \gamma(t)A^{T-1}x(t) \geqslant (1 - \sigma d_0)\gamma(t)\,(px(t))\hat{x}. \tag{6}$$

Рассмотрим точку $y_T = q(x(t))x(t)/px(t)$. Ясно, что в нее можно за T шагов попасть из точки $y = A^T y_T$. Поскольку $\varrho(y_T, \hat{x}) = \varrho(x(t), \hat{x}) \leqslant d_0$, то по лемме 1 $\varrho(y, \hat{x}) \leqslant a\varepsilon d_0$. Отсюда, как легко показать, $y \leqslant$ $\leqslant (1 + \sigma d_0)(py)\hat{x}$. Так как p — собственный вектор матрицы A, то $py = py_T = q(x(t))$ и, значит, $y \leqslant (1 + \sigma d_0)q(x(t))\hat{x}$. Поскольку $x(t) \geqslant q(x(t))\hat{x}$, то отсюда и из вида модели (1) следует, что из $x(t)$ можно за T шагов попасть в точку $y^T/(1 + \sigma d_0) = q(x(t))x(t)/$ $/px(t)(1 + \sigma d_0)$. Следовательно, по оптимальности имеем

$$\gamma(t) \geqslant q(x(t))/px(t)(1 + \sigma d_0) \geqslant q(x(t))(1 - \sigma d_0)/px(t).$$

Таким образом, в силу (6) и поскольку $q(\hat{x}) = 1$, верно $q(x(t+1)) \geqslant$ $\geqslant (1 - \sigma d_0)^2 q(x(t))$. Повторяя рассуждения применительно к моментам $t + 1, \ldots, t + N - 1$, получим

$$q(x(t+N)) \geqslant (1 - \sigma d_0)^{2N} q(x(t)) \geqslant (1 - 2\sigma N d_0)\,q(x(t)) \tag{7}$$

для всех $t \geqslant \tau(\varepsilon)$. Последнее в цепочке неравенств (7) следует из (5) и сравнения производных по Δ функций $(1 - \Delta)^N$ и $1 - N\Delta$, равных между собой при $\Delta = 0$.

Положим $z = A^N x(t+N)$, $d_1 = \varrho(x(t+N), \hat{x})$, так что по лемме 1 $\varrho(z, \hat{x}) \leqslant ad_1\varepsilon$, тем самым $z \geqslant (1-\sigma d_1)(pz)\hat{x}$ и $q(z) \geqslant (1-\sigma d_1)pz$. Следовательно, учитывая (5), $pz \leqslant q(z)/(1-\sigma d_1) \leqslant q(z)(1+2\sigma d_1)$. В силу (1) $z \leqslant x(t)$, так что $q(z) \leqslant q(x(t))$. Таким образом, справедливо

$$pz \leqslant q(x(t))(1+2\sigma d_1). \tag{8}$$

Заметим, что $q(x) \leqslant px$, поскольку $q(x)\hat{x} \leqslant x$ и $p\hat{x} = 1$. Отсюда, так как мы положили $\|x\| = px$ для $x \geqslant 0$, и по неравенству треугольника имеем

$$d_1 = \frac{\|x(t+N) - px(t+N)\hat{x}\|}{px(t+N)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|x(t+N) - q(x(t+N))\hat{x}\| + px(t+N) - q(x(t+N))}{px(t+N)} =$$

$$= \frac{2[px(t+N) - q(x(t+N))]}{px(t+N)} = \frac{2[pz - q(x(t+N))]}{px(t+N)}.$$

Отсюда, в силу (8), (7) и (5) следует

$$d_1 \leqslant \frac{2[q(x(t))(1+2\sigma d_1) - q(x(t))(1-2\sigma N d_0)]}{q(x(t))(1-2\sigma N d_0)} \leqslant$$

$$\leqslant 8(\sigma d_1 + \sigma N d_0) < d_1/2 + d_0/4,$$

так что $d_1 \leqslant d_0/2$, т. е.

$$\varrho(x(t+N), \hat{x}) \leqslant \max_{s=t,\ldots,t+N-1} \varrho(x(s), \hat{x})/2.$$

Поскольку это неравенство справедливо для всех $t \geqslant \tau(\varepsilon)$, то последовательно для $r = 0, 1, \ldots, N-1$ легко показать, что $\varrho(x(t+r+N), \hat{x}) \leqslant d_0/2$. Таким образом, $\varrho(x(t+2N), \hat{x}) \leqslant \max_{s=t+N,\ldots,t+2N-1} \varrho(x(s), \hat{x})/2 \leqslant d_0/4$. Аналогично, $\varrho(x(t+kN+r), \hat{x}) \leqslant d_0/2^k$ для $t \geqslant \tau(\varepsilon)$, $k = 0, 1, \ldots$, или

$$\varrho(x(\tau), \hat{x}) \leqslant d_0/2^{[(\tau-t)/N]} \leqslant \varepsilon/2^{[(\tau-t)/N]}, \quad \tau \geqslant t \geqslant \tau(\varepsilon), \tag{9}$$

где $[\cdot]$ — обозначение целой части числа. Следовательно, применяя формулу (7), которая в силу произвольности выбора $t \geqslant t(\varepsilon)$ означает, что для любого $\tau \geqslant \tau(\varepsilon) + N$ выполняется

$$q(x(\tau)) \geqslant (1 - 2\sigma N \max_{s=\tau-N,\ldots,\tau-1} \varrho(x(s), \hat{x}))\, q(x(\tau-N)),$$

получим

$$q(x(\tau)) \geqslant \prod_{k=0}^{[(\tau-\tau(\varepsilon))/N]-1} (1 - 2\sigma N\varepsilon/2^k)\, q(x(t(\varepsilon))), \quad \tau \geqslant \tau(\varepsilon).$$

Легко видеть, что при $\tau \to \infty$ произведение сходится к положительной величине. Тем самым рассматриваемая траектория скользящего планирования строго отделена от нуля, что вместе с (9) доказывает теорему.

Замечание. Утверждение теоремы сохраняет силу, если в задаче (2) ограничение на пропорции выпуска в конечный момент имеет вид $x_T(k) \geqslant \gamma x_s(k-1)$ для некоторого $s = l, \ldots, T-1$, т. е. на каждой итерации пропорции фиксируются на уровне, соответствующем плану предыдущей итерации на s-й год, где l — натуральное число, зависящее только от матрицы A. Доказательство этого факта основывается на тех же соображениях, что и доказательство теоремы.

Полученные результаты можно интерпретировать следующим образом: сходимость процесса скользящего планирования можно обеспечить, если на каждой его итерации учитывать опыт, полученный на предыдущей итерации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Березнева Т. Д., Экономика и матем. методы, **12**, № 4, 740—746 (1976).
2. Каганович М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **28**, № 4, 310—316 (1979).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
24/X 1979

M. KAGANOVITS

LIBISEVA PLANEERIMISE TRAJEKTOORI KOONDUVUSEST MAJANDUSHARUDEVAHELISES DÜNAAMILISES MUDELIS

Artiklis on uuritud libiseva planeerimise trajektooride asümptootikat ühes majandusliku kasvu maatriksmudelis. On teada, et need trajektoorid üldiselt ei koondu statsionaarseks seisuks. Töös on koonduvus tõestatud, kusjuures on kasutatud mõningaid eespool mainitud trajektooride konstrueerimise printsiibi kohta käivaid lisatingimusi.

M. KAGANOVICH

ON A CONVERGENCE OF THE SLIDING PLANNING PATHS IN A MULTISECTOR DYNAMIC MODEL

The asymptotic behavior of sliding planning paths in the von Neumann model with no joint production is considered. According to the principle of sliding planning, the plan is revised at each year of planning interval, an additional year being appended to the last. More exactly, let $x(k)$ be the sliding plan for the year k, then the plan $x(k+1)$ for the next year is defined as follows. An optimal path $\{x_t(k)\}_{t=0}^{T}$ is computed, taking the current state for the initial point: $x_0(k) = x(k)$, the planning horizon T remaining constant for all the periods, and the (final-state) objective functions being allowed to vary. Then the first year optimal plan $x_1(k)$ is taken for $x(k+1)$.

Under the strong turnpike theorem assumptions it was shown in [2] for the more general von Neumann-Gale model that, beginning with some moment, the sliding planning paths lie close to the von Neumann ray. However, an example demonstrates that they need not in general converge to it.

Our intent is to determine such conditions which would ensure the convergence. Here the convergence of the sliding planning paths is proved under a restriction imposed on the type of optimal paths from which they are being constructed (see formula (2)). This restriction may be interpreted as follows: every iteration of the sliding planning proceeds in accordance with the experience derived from the previous one.