EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 29. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1980, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 29
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1980, № 2

УДК 519.835.62+519.856

Р. ЛЕПП

МИНИМИЗАЦИЯ ГЛАДКОЙ ФУНКЦИИ ПРИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

(Представил Н. Алумяэ)

1. В статье рассматривается стохастический аналог обобщенного метода множителей Лагранжа для решения задачи А

$$\min f(x)$$

$$P[g_i(x,\xi)<t_i]=\beta_i, \quad i=1, \ldots, m,$$

и задачи Б

$$\min f(x)$$

$$P[g_i(x,\xi)<t_i]\leqslant\beta_i, \quad i=1, \ldots, m.$$

Здесь $x\in R^r$, $m\leqslant r$, ξ — s-мерный случайный вектор с неизвестным распределением, числа t_i и $0\leqslant\beta_i\leqslant 1$ фиксированы.

Методам минимизации при наличии ограничений и математических ожиданий в формулировке задач в последнее время посвящено немало работ [1–10]. В основном эти методы являются в том или ином смысле обобщениями метода стохастической аппроксимации на задачи с ограничениями. Однако их применение непосредственно к решению задач с вероятностными ограничениями связано с трудностями, хотя с формальной точки зрения функцию вероятности

$$v_i(x,t_i)=P[g_i(x,\xi)<t_i] \tag{1}$$

можно представить как математическое ожидание от характеристической функции множества $\{\xi : g_i(x,\xi)<t_i\}$. Дело в том, что такие свойства функции $v_i(x,t_i)$, как гладкость, выполнение условия Липшица $v'_{ix}(x,t_i)$, квазивыпуклость и т. д., существенно зависят от распределения случайного вектора ξ. Поэтому трудно поддаются построению, например, квази- или псевдоградиентные [1, 11] оценки для $v'_{ix}(x,t_i)$. В настоящей работе эта трудность преодолевается путем использования состоятельной оценки для $v_i(x,t_i)$ и ее производной как аналога оценки Парзена, предложенной в [12] для оценивания плотностей вероятности. Исходя из этой оценки, строятся итеративные методы нахождения допустимой стационарной точки задач А и Б.

Решению задачи Б фактически посвящена лишь одна статья [13]. В ней вероятностные ограничения заменялись их эмпирическими оценками и показывалось, при каких условиях предел решений задач с эмпирическими ограничениями с вероятностью 1 есть решение исходной задачи.

2. Для решения задачи А применим стохастический аналог метода Мила [14]. Введем следующие обозначения

$$(v(x,t)-\beta)^{\mathrm{T}}=(v_1(x,t_1)-\beta_1,\ \ldots,\ v_m(x,t_m)-\beta_m),$$
$$G(x,t)=(v'_{1x}(x,t_1),\ \ldots,\ v'_{mx}(x,t_m))^{\mathrm{T}}. \tag{2}$$

Предположим:

П1. Для всех $x\in R^r$ функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема, функции $g_i(x,\xi)$, $i=1,\ldots,m$, непрерывно дифференцируемы по x в R^r при почти всех ξ, дифференцируемы по ξ при $x\in R^r$ и $f'_\xi(x,\xi)\neq 0$ при почти всех ξ.

П2. Матрица $G(x,t)$ имеет при каждом x полный ранг.

Множество решений X^* задачи А определим следующим образом [5, 6, 14]:

$$X^*=\{x^*:\|f'_x(x^*)+G^{\mathrm{T}}(x^*,t)\lambda^*\|^2=0\}\cap\{x^*:v(x^*,t)=\beta\}, \tag{3}$$

где

$$\lambda^*=-(G(x^*,t)G^{\mathrm{T}}(x^*,t))^{-1}G(x^*,t)f'_x(x^*). \tag{4}$$

Пусть $\xi_1,\ldots,\xi_n$ — независимые случайные векторы, распределение которых совпадает с распределением вектора ξ. Тогда $g_i(x,\xi_1),\ldots$ $\ldots,g_i(x,\xi_n)$ — независимые случайные величины с распределением $v_i(x,t)$, так как при фиксированном x функция $v_i(x,t)$ от t является функцией распределения случайной величины $g_i(x,\xi)$. Оценка Парзена функции $v_i(x,t)$ в нашем случае имеет следующий вид:

$$v_{in}(x,t,\xi_1,\ldots,\xi_n)=\frac{1}{nh_n}\sum_{l=1}^{n}\int_{-\infty}^{t}K\left(\frac{\tau-g_i(x,\xi_l)}{h_n}\right)d\tau, \tag{5}$$

где непрерывная функция действительной переменной $K(y)$ удовлетворяет условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty}K(y)\,dy=1,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}|yK(y)|\,dy<\infty, \tag{6}$$

а числовая последовательность h_n — условиям

$$\lim_{n\to\infty}h_n=0,\qquad \lim_{n\to\infty}nh_n=\infty. \tag{7}$$

В дальнейшем для краткости обозначим $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ через ξ^n. Так как функция $K(y)$ непрерывна, то

$$v'_{inx}(x,t_i,\xi^n)=-\frac{1}{nh_n}\sum_{l=1}^{n}g'_{ix}(x,\xi_l)K\left(\frac{t_i-g_i(x,\xi_l)}{h_n}\right). \tag{8}$$

Оценку матрицы $G(x,t)$ обозначим через

$$G_n(x,t,\xi^n)=(v'_{1nx}(x,t_1,\xi^n),\ \ldots,\ v'_{mnx}(x,h_n,\xi^n))^{\mathrm{T}}. \tag{9}$$

В [14] минимизация гладкой функции при гладких ограничениях типа равенств обеспечивалась определением на каждом шаге множителей Лагранжа λ_n путем минимизации нормы градиента лагранжиана по $\lambda\in R^m$. Если матрица $G(x,t)$ имеет при каждом x полный ранг, то

$$\lambda_n=-(G(x_n,t)G^{\mathrm{T}}(x_n,t))^{-1}G(x_n,t)f'_x(x_n). \tag{10}$$

Однако оценка матрицы $G(x,t)$ в виде (9) может с вероятностью 1 не иметь полного ранга. В этом случае для нахождения $\lambda_n(\xi^n)$ следует использовать вместо (10) устойчивую — регуляризированную — формулу [15]

$$\lambda_n(\xi^n) = -(G_n(x_n,t,\xi^n)\,G_n^{\mathrm{T}}(x_n,t,\xi^n) + \alpha_n I)^{-1} G_n(x_n,t,\xi^n) f'_x(x_n), \quad (11)$$

где $0 < \alpha_n$ и $\alpha_n \to 0$.

Для итеративного решения задачи А применим теперь стохастический аналог обобщенного метода множителей Лагранжа:

$$x_{n+1} = x_n - \gamma_n [f'_x(x_n) + G_n^{\mathrm{T}}(x_n,t,\xi^n)\lambda_n(\xi^n) + \\ + M G_n^{\mathrm{T}}(x_n,t,\xi^n)\,(v_n(x_n,t,\xi^n) - \beta)], \quad (12)$$

где $M > 0$, а $\lambda_n(\xi^n)$ находится по формуле (11).

П3. $$\gamma_n > 0, \quad \gamma_n \to 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty,$$

$$\alpha_n > 0, \quad \alpha_n \to 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \gamma_n < \infty.$$

Условия дифференцируемости функции $v_i(x, t_i)$, $i = 1, \ldots, m$, еще мало исследованы. Некоторые варианты таких условий приведены в [16, 17]. Поэтому в дальнейшем предположим:

П4. При всех $\|x\| \leqslant T$ и всех $t \in R^1$ существуют и равномерно ограничены

$$v'_{ix}(x,t),\ v''_{ixt}(x,t),\ i=1,\ldots,m, \text{ и } \lim_{t\to-\infty} v_i(x,t) = 0,\ i=1,\ldots,m.$$

Пусть, кроме того,

П5. Существуют такие функции $R_{ij}: R^s \to R^1$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, r$, что для любого $\|x\| \leqslant T$

$$|g'_{ix_j}(x,\xi)| \leqslant R_{ij}(\xi) \quad \text{и} \quad \int_{R^s} R_{ij}(\xi)\,dP(\xi) < \infty.$$

П6. Функция $f(x)$ принимает на множестве X^* не более счетного числа значений.

Теорема 1. *Если выполнены условия* П1—П6 *и если почти наверное* (*п. н.*) $\sup_n \|x_n(\xi^n)\| < \infty$, *то предельные точки последовательности* $\{x_n\}$, *полученные методом* (11), (12), *п. н. принадлежат множеству* X^* *и последовательность* $f(x_n)$ *п. н. имеет предел.*

Доказательство теоремы из-за громоздкости здесь опускается. Отметим только, что оно может быть проведено, например, по схеме Е. А. Нурминского [18] или по схеме Г. Дж. Кушнера [5, 6].

Замечание 1. В отличие от детерминистических методов [14], на константу M не налагается никаких ограничений, кроме ее неотрицательности.

Следствие. Если в теореме 1 отказаться от условия П6, то последовательность $\{x_n\}$ имеет хотя бы одну предельную точку, принадлежащую множеству X^*.

3. Рассмотрим задачу Б

$$\min f(x)$$

$$v_i(x, t_i) \leqslant \beta_i, \quad i=1, \ldots, m.$$

Обозначим через $w_i(x, t_i) = \max[0, v_i(x, t_i) - \beta_i]$,

$$w_{in}(x, t_i, \xi^n) = \max[0, v_{in}(x, t_i, \xi^n) - \beta_i],$$

$$w(x, t)^{\mathrm{T}} = (w_1(x, t_1), \ldots, w_m(x, t_m)) \quad \text{и} \quad w_n(x, t, \xi^n)^{\mathrm{T}} =$$
$$= (w_{1n}(x, t, \xi^n), \ldots, w_{mn}(x, t, \xi^n)).$$

Для решения задачи Б предложим следующий метод

$$x_{n+1} = x_n - \gamma_n [f'_x(x_n) + G_n^{\mathrm{T}}(x_n, t, \xi^n)\lambda_n(\xi^n) + MG_n^{\mathrm{T}}(x_n, t, \xi^n) w_n(x_n, t)], \tag{13}$$

где $\lambda_n(\xi^n)$ находится путем минимизации нормы оценки градиента лагранжиана по λ на множестве $\{\lambda : \lambda \geqslant 0\}$. Но так как эта вспомогательная задача квадратичного программирования с простыми ограничениями может быть некорректной, то прибегнем к процессу регуляризации, т. е. найдем $\lambda_n(\xi^n)$ как решение задачи

$$\min_{\lambda \geqslant 0} [\|f'_x(x_n) + G_n^{\mathrm{T}}(x_n, t, \xi^n)\lambda\|^2 + \alpha_n\|\lambda\|^2], \tag{14}$$

где $0 < \alpha_n$ и $\alpha_n \to 0$.

Множество решений X^{**}, точки которого удовлетворяют необходимым условиям Куна—Таккера, определим в виде [5]

$$X^{**} = F \cap C,$$

где $F = \{x^* : \|f'_x(x^*) + G^{\mathrm{T}}(x^*, t)\lambda^*\|^2 = 0\}$, $\lambda^* = \arg\min\limits_{\lambda \geqslant 0} \|f'_x(x^*) + G^{\mathrm{T}}(x^*, t)\lambda\|^2$, $C = \{x^* : v_i(x^*, t_i) \leqslant \beta_i, \quad i=1, \ldots, m\}$.

Теорема 2. *Если выполнены условия* П1—П6 *и если п. н.* $\sup\limits_n \|x_n(\xi^n)\| < \infty$, *то предельные точки последовательности* $\{x_n\}$, *полученные методом* (12), (14), *п. н. принадлежат множеству решений* X^{**} *задачи* Б *и последовательность* $f(x_n)$ *п. н. имеет предел.*

Доказательство теоремы 2 для краткости опускается. Проводится оно также по схеме [18] или [5, 6].

Замечание 2. Замечание 1 и следствие остаются верными и для задачи Б.

Замечание 3. Фактически методика решения задач А и Б примыкает к методам решения предельных экстремальных задач [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ермольев Ю. М., Методы стохастического программирования, М., «Наука», 1976.
2. Ермольев Ю. М., Нурминский Е. А., Кибернетика, № 2, 130—132 (1973).
3. Гупал А. М., Кибернетика, № 6, 94—100 (1974).
4. Гупал А. М., Техн. кибернетика, № 1, 32—36 (1979).
5. Kushner, H. J., Kelmanson, M. L., SIAM J. Contr. Optimiz., 14, № 5, 827—842 (1976).
6. Kushner, H. J., Clark, D. S., Stochastic Approximation Methods for Constrained and Unconstrained Systems, Springer-Verlag, New York—Heidelberg—Berlin, 1978.

7. Kushner, H. J., Ann. Statist., 2, № 4, 713—723 (1974).
8. Kushner, H .J., Sanvicente, E., Automatica, 11, № 4, 375—380 (1975).
9. Hiriart-Urruty, J.-B., C. r. Acad. Sci. A, 282, 907—910 (1976).
10. Poljak, B. T., Math. Programming, 14, № 1, 87—97 (1978).
11. Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З., Автоматика и телемеханика, № 6, 45—68 (1973).
12. Parzen, E., Ann. Math. Statistics, 33, № 3, 1065—1076 (1962).
13. Юби Э., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 26, № 4, 369—375 (1977).
14. Miele, A., Cragg, E. G., Iver, R. R., Levy, A. V., J. Optimiz. Theory Appl., 8, № 2, 115—130 (1971).
15. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Методы решения некорректных задач, М., «Наука», 1974.
16. Райк Э., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 24, № 1, 3—9 (1975).
17. Каплинский А. И., Позняк А. С., Пропой А. И., Автоматика и телемеханика, № 8, 51—63 (1971).
18. Нурминский Е. А., Кибернетика, № 6, 79—81 (1972).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
4/XII 1979

R. LEPP

SILEDA FUNKTSIOONI MINIMEERIMINE TÕENÄOSUSKITSENDUSTE KORRAL

Sileda funktsiooni minimeerimiseks võrduste ja võrratustega antud tõenäosuskitsenduste korral on artiklis esitatud üldistatud Lagrange'i kordajate meetodi stohhastilised analoogid. Tõenäosusfunktsiooni $P[f(x, \xi)<t]$ tuletise argumendi x järgi hindamiseks on igal sammul kasutatud Parzeni tuuma tüüpi mõjusat (konsistentset) hinnangut. Väidetakse, et stohhastilise üldistatud Lagrange'i kordajate meetodil saadud jada piirpunktid rahuldavad tõenäosusega üks Kuhn-Tuckeri tarvilikke tingimusi.

R. LEPP

MINIMIZATION OF A SMOOTH FUNCTION UNDER PROBABILITY CONSTRAINTS

This paper is concerned with stochastic analogies of the deterministic combined penalty function — multiplier method [14] for finding a minimum of a smooth function $f(x)$ under probability constraints $P[g_i(x, \xi)<t_i]=\beta_i$ or $P[g_i(x, \xi)<t_i]\leqslant\beta_i$, $i=1, \ldots, m$. Basing on n random independent realizations of an unknown random vector ξ, the Parzen kernel-type [12] differentiable in x consistent estimate

$$v_{in}(x, t_i, \xi_1, \ldots, \xi_n)=\frac{1}{nh_n}\sum_{l=1}^{n}\int_{-\infty}^{t_i} K\left(\frac{\tau-g_i(x,\xi_l)}{h_n}\right)d\tau$$

of the probability function $v_i(x,t)=P[g_i(x, \xi)<t_i]$ is constructed. Here the sequence h_n and the function $K(y)$ satisfy certain conditions. At each iteration the method [14] requires the minimization of the norm of the gradient of the estimated Lagrangian with respect to the Lagrange multiplier λ in R^m or R^m_+. Since the auxiliary problem of minimization of the quadratic function may be incorrect, regularizing coefficient is introduced. The conditions are presented under which the limit points of the sequences generated by stochastic combined penalty function — multiplier methods, are both feasible and satisfy the Kuhn-Tucker necessary conditions with the probability one.