EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 29. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1980, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 29
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1980, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1980.2.03

УДК 519.854.3

Х. НЯРИПЯ

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ ОЦЕНОЧНЫЕ ЗАДАЧИ К ЗАДАЧАМ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

(Представил А. Хумал)

1. Сравнение некоторых оценочных задач

Рассмотрим задачу целочисленного линейного программирования (ЦЛП)

$$Z_0 = \min_{x\in X} \{cx \mid Nx \leqslant b\}, \tag{1}$$

где x — n-мерный вектор-столбец, c — неотрицательная n-мерная вектор-строка, b — неотрицательный m-мерный вектор-столбец, $N = (a_1, \ldots, a_n)$ — $(m\times n)$-матрица, а

$$X = \{x \mid \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \equiv \beta,\ x \geqslant 0 \text{ и целое}\}$$

определяет бесконечную решетку целочисленных точек, удовлетворяющих системе линейных сравнений. Отметим, что любая задача ЦЛП, в случае ограниченности целевой функции соответствующей ей непрерывной задачи, приводима к виду (1) [1] (с. 378—388).

Известен целый ряд оценочных задач к задачам ЦЛП (см., напр., [2]), в том числе и задача групповой минимизации $\min\{cx \mid x\in X\}$ и задача

$$Z_1 = \max_{u\geqslant 0} \min_{x\in X} \{cx + u(Nx - b)\}, \tag{2}$$

предложенная в [3]. В настоящей работе изучаются еще две оценочные задачи

$$Z_2 = \max_{u\geqslant 0} \min_{x\in X} \{cx \mid u(Nx - b) \leqslant 0\} \tag{3}$$

и

$$Z_3 = \min_{z\geqslant 0}\ \max_{0\leqslant u\leqslant e}\ \min_{x\in X} \{cx \mid z - cx + u(Nx - b) \leqslant 0, cx \leqslant z\}, \tag{4}$$

где e — вектор, состоящий только из единиц. Строится также алгоритм решения задачи (4) (алгоритм решения задачи (3) аналогичен и поэтому опускается).

Пусть x_0^* — оптимальное решение задачи (1), (u_1^*, x_1^*) и (u_2^*, x_2^*) — оптимальные решения задач (2) и (3), а (z_3^*, u_3^*, x_3^*) — оптимальное решение задачи (4).

Теорема 1. *Справедливы неравенства*

$$Z_1 \leqslant Z_2 \leqslant Z_3 \leqslant Z_0.$$

Доказательство. Так как $cx_0^* = Z_0$ и для любого $u \geqslant 0$ имеем $u(Nx_0^* - b) \leqslant 0$, то

$$Z_3 \leqslant \max_{0 \leqslant u \leqslant e} \min_{x \in X} \{cx \mid Z_0 - cx + u(Nx - b) \leqslant 0, cx \leqslant Z_0\} \leqslant Z_0.$$

Из оптимальности z_3^* следует, что при любом $0 \leqslant u \leqslant e$

$$\min_{x \in X} \{cx \mid z_3^* - cx + u(Nx - b) \leqslant 0, cx \leqslant z_3^*\} \leqslant Z_3,$$

а так как при ослаблении ограничений минимум не может увеличиваться, то и

$$\min_{x \in X} \{cx \mid u(Nx - b) \leqslant 0\} \leqslant Z_3.$$

Последнее неравенство остается справедливым для всех $u \geqslant 0$, следовательно,

$$Z_2 = \max_{0 \leqslant u} \min_{x \in X} \{cx \mid u(Nx - b) \leqslant 0\} \leqslant Z_3.$$

Неравенство $Z_1 \leqslant Z_2$ доказывается аналогично предыдущему, и тем самым теорема доказана.

2. Исследование новой оценочной задачи и одна ее модификация

Изложим некоторые свойства оптимальных решений задачи (4).

Теорема 2. *Если задача* (4) *имеет конечное оптимальное решение, то* $Z_3 = z_3^*$.

Доказательство. В силу ограничения $cx \leqslant z$ имеем $Z_3 = cx_3^* \leqslant z_3^*$. С другой стороны,

$$Z_3 = \max_{0 \leqslant u \leqslant e} \min_{x \in X} \{cx \mid z_3^* - cx + u(Nx - b) \leqslant 0, cx \leqslant z_3^*\} \geqslant$$

$$\geqslant \min_{x \in X} \{cx \mid z_3^* - cx \leqslant 0, cx \leqslant z_3^*\} \geqslant z_3^*.$$

Теорема доказана.

Введем следующие обозначения:

$$L(z, u) = \min_{x \in X} \{cx \mid z - cx + u(Nx - b) \leqslant 0\}, \tag{5}$$

$$L(z) = \max_{0 \leqslant u \leqslant e} L(z, u).$$

Теорема 3. *Если* $\bar{z} \leqslant z_3^*$, *то* 1) *при любом* $0 \leqslant \bar{u} \leqslant e$ *выполняется неравенство* $L(\bar{z}, \bar{u}) \leqslant Z_3$ *и* 2) *из равенства* $L(\bar{z}) = \bar{z}$ *следует равенство* $\bar{z} = z_3^*$.

Доказательство. Оценим Z_3 снизу:

$$Z_3 = \max_{0\leqslant u\leqslant e}\min_{x\in X}\{cx\,|\,z^*_3 - cz + u(Nx-b)\leqslant 0, cx\leqslant z^*_3\}\geqslant$$

$$\geqslant \min_{x\in X}\{cx\,|\,z^*_3 - cx + \bar{u}(Nx-b)\leqslant 0, cx\leqslant z^*_3\}\geqslant$$

$$\geqslant \min_{x\in X}\{cx\,|\,z^*_3 - cx + \bar{u}(Nx-b)\leqslant 0\} = L(z^*_3, \bar{u})\geqslant L(\bar{z}, \bar{u}).$$

Докажем теперь второе утверждение теоремы. Если $L(\bar{z}) = \bar{z}$, то для любого $0\leqslant u\leqslant e$ существует $x(u)\in X$ такое, что $\bar{z} - cx(u) + u(Nx(u)-b)\leqslant 0$ и $cx(u)\leqslant \bar{z}$. Следовательно,

$$\bar{z} = \max_{0\leqslant u\leqslant e}\min_{x\in X}\{cx\,|\,\bar{z} - cx + u(Nx-b)\leqslant 0, cx\leqslant \bar{z}\}\geqslant$$

$$\geqslant \min_{z\geqslant 0}\max_{0\leqslant u\leqslant e}\min_{x\in X}\{cx\,|\,z - cx + u(Nx-b)\leqslant 0, cx\leqslant z\} = Z_3$$

и, в силу предположения $\bar{z}\leqslant z_3{}^* = Z_3$, $\bar{z} = z_3{}^*$. Теорема доказана.

Пусть $J^0 = \{j\,|\,c_j = 0\}$, $d_j = \min\{t\,|\,t\alpha_j \equiv 0, t\geqslant 1\}$ — порядок циклической группы, генерированной вектором α_j, $X_1 = \{x\in X\,|\,x_j\leqslant d_j - 1, j\in J^0\}$ и $L_1(z,u) = \min_{x\in X_1}\{cx\,|\,z - cx + u(Nx-b)\leqslant 0\}$.

Теорема 4. *Имеет место равенство*

$$L(z) = \max_{0\leqslant u\leqslant e}\{L_1(z,u)\,|\,u a_j\geqslant 0, j\in J^0\}.$$

Доказательство. Сначала докажем, что $L(z) = \max\limits_{0\leqslant u\leqslant e}\{L(z,u)\,|\,u a_j\geqslant 0, j\in J^0\}\equiv L_1(z)$. По определению $L_1(z)\leqslant L(z)$. Пусть $L(z) = L(z,\bar{u})$. Если $\bar{u}a_j\geqslant 0$ для всех $j\in J^0$, то $L_1(z)\geqslant L(z,\bar{u}) = L(z)$ и, следовательно, $L_1(z) = L(z)$. Предположим теперь, что при некотором $k\in J^0$ имеем $\bar{u}a_k < 0$. Обозначим оптимальное решение задачи $\min\{cx\,|\,x\in X\}$ через $\bar{x}$ и определим $\bar{x}(t) = \bar{x} + td_k e_k$, где e_k — k-й единичный вектор. Тогда при любом целочисленном неотрицательном t выполняются условия $\bar{x}(t)\in X$ и $c\bar{x}(t) = c\bar{x}$. Так как $\bar{u}a_k < 0$, то существует неотрицательное целочисленное $\bar{t}$, для которого $z - c\bar{x}(\bar{t}) + u(N\bar{x}(\bar{t}) - b)\leqslant 0$. Следовательно, $L(z) = L(z,\bar{u}) = c\bar{x}\leqslant \min\{cx\,|\,z - cx\leqslant 0, x\in X\} = L(z,0)\leqslant L_1(z)$ и снова $L(z) = L_1(z)$.

Теперь докажем, что если для всех $j\in J^0$ верно $u a_j\geqslant 0$, то $L_1(z,u) = L(z,u)$. Пусть $x(z,u)$ — оптимальное решение задачи (5), т. е. $cx(z,u) = L(z,u)$. Для каждого $j\in J^0$ найдется целочисленное $t_j\geqslant 0$ такое, что $0\leqslant x_j(z,u) - t_j d_j e_j\leqslant d_j - 1$. Легко проверить, что вектор $\bar{x}(z,u) = x(z,u) - \sum_{j\in J^0} t_j d_j e_j$ удовлетворяет следующим условиям: $\bar{x}(z,u)\in X_1$, $c\bar{x}(z,u) = cx(z,u)$ и $z - c\bar{x}(z,u) + u(N\bar{x}(z,u) - b)\leqslant 0$. Тогда $L_1(z,u)\leqslant c\bar{x}(z,u) = cx(z,u) = L(z,u)$, но так как $X_1\subset X$, то справедливо неравенство $L_1(z,u)\geqslant L(z,u)$ и тем самым $L_1(z,u) = L(z,u)$.

Утверждение теоремы следует непосредственно из доказанных выше двух утверждений.

Доказанная теорема позволяет вместо задачи (4) решать ее модификацию, в которой X заменено на X_1. Пересечение X_1 на любое множество уровня целевой функции cx является конечным множеством, что очень важно для построения конечных алгоритмов.

3. Решение оценочной задачи

Опишем алгоритм решения задачи (4).

Шаг 0. Присвоить параметрам начальные значения: $k:=1$, $z^1:=0$ и $u^1:=0$.

Шаг 1. Решить задачу

$$\min_{x\in X_1} \{cx \mid z^k - cx + u^k(Nx-b) \leqslant 0\}, \tag{6}$$

которая является задачей групповой минимизации с одним дополнительным линейным ограничением.*

Если задача (6) не разрешима, то у задачи (1) отсутствуют допустимые решения и работа алгоритма завершена. В противном случае взять $z^{k+1}:=\max\{z^k, cx^k\}$, где x^k — оптимальное решение задачи (6), и перейти к шагу 2.

Шаг 2. Найти оптимальное решение (σ^k, u^{k+1}) задачи

$$\begin{aligned} &\max \sigma \\ &\sigma \leqslant u(Nx^t - b) + z^{k+1} - cx^t,\ t=1, \ldots, k, \\ &0 \leqslant ua_j,\ j\in J^0, \\ &0 \leqslant u \leqslant e. \end{aligned} \tag{7}$$

Задача (7) является задачей линейного программирования с ограниченной целевой функцией и всегда имеет оптимальное решение.

Если $\sigma^k=0$, то $Z_3 = z_3^* = z^{k+1}$ и оптимальным решением задачи (4) является (z^{k+1}, u^t, x^t) при любом $t\in I=\{i \mid cx^i = z^{k+1},\ i=1, \ldots, k\}$. Работа алгоритма завершена. В противном случае $\sigma^k > 0$, ибо $\sigma=0$, $u=0$ является допустимым решением любой задачи (7). Взять k равным $k+1$ и перейти к шагу 1.

4. Обоснование алгоритма

Покажем, что для всех k верно $z^k \leqslant z_3^*$. Очевидно, $z^1=0\leqslant z_3^*$. Пусть, далее, $z^k\leqslant z_3^*$ и покажем, что тогда и $z^{k+1}\leqslant z_3^*$. По определению $z^{k+1}=\max\{z^k, cx^k\}$. Если $z^{k+1}=z^k$, утверждение справедливо по предположению $z^k\leqslant z_3^*$, а если $z^{k+1}=cx^k$, — по теоремам 4 и 3: $z^{k+1} = cx^k = L_1(z^k, u^k) = L(z^k, u^k) \leqslant z_3^*$.

Докажем теперь, что если задача (1) имеет допустимые решения, то они имеются и у всех задач (6). Пусть $\bar{x}$ — некоторое допустимое решение задачи (1). Тогда $N\bar{x}-b\leqslant 0$, а также для всех $u\geqslant 0$ имеем $u(N\bar{x}-b)\leqslant 0$. Так как $c\bar{x}\geqslant Z_0\geqslant Z_3 = z_3^*\geqslant z^k$ при любом k, то $z^k - c\bar{x} + u^k(N\bar{x}-b)\leqslant 0$ и, следовательно, $L(z^k, u^k)\leqslant c\bar{x}$. По теореме 4 $L_1(z^k, u^k) = L(z^k, u^k)\leqslant c\bar{x}$, что возможно только тогда, когда соответствующая задача (6) имеет по меньшей мере одно допустимое решение.

Остается доказать, что из $\sigma^k=0$ следует $z^{k+1}=z_3^*$. Если $\sigma^k=0$, то для каждого $u\in U=\{u \mid 0\leqslant u\leqslant e,\ ua_j\geqslant 0,\ j\in J^0\}$ существует $x(u)\in\{x^t \mid t=1, \ldots, k\}$ такое, что $cx(u)\leqslant z^{k+1}=\max\limits_{t=1,\ldots,k} cx^t$ и $z^{k+1}-cx(u)+u(Nx(u)-b)\leqslant 0$. Следовательно, для всех $u\in U$ верно $L_1(z^{k+1}, u)\leqslant z^{k+1}$, но, с другой стороны, $L_1(z^{k+1}, 0) = z^{k+1}$ и тем самым $\max\limits_{u\in U} L_1(z^{k+1}, u) = z^{k+1}$. Тогда по теореме 4 $L(z^{k+1}) = z^{k+1}$ и по теореме 3 $z^{k+1} = z_3^* = Z_3$.

* Методы решения таких задач будут опубликованы отдельно.

5. Конечность алгоритма и некоторые замечания

Покажем, что если задача (1) имеет допустимое (тогда и оптимальное) решение, то описанный выше алгоритм завершается через конечное число итераций.

При сделанном предположении $z_3^* = Z_3 \leqslant Z_0 < \infty$, а по определению алгоритма для всех k имеем $cx^k \leqslant z^{k+1} \leqslant z_3^*$ и $x^i \neq x^j$, если $i \neq j$ (это гарантируется определением u^k в задаче (7)). Конечность алгоритма вытекает из конечности множества $X(z_3^*) = \{x \in X_1 | cx \leqslant z_3^*\}$.

Сделаем еще некоторые замечания:

1. Если на некоторой итерации $Nx^k \leqslant b$, то x^k является оптимальным решением задачи (1).
2. Если задача (1) не имеет допустимых решений, описанный алгоритм может оказаться бесконечным, но тогда неограниченно увеличивается и нижняя граница z^k оптимального значения целевой функции задачи (1).
3. На втором шаге алгоритма можно ограничиться любым решением $(\bar{\sigma}^k, \bar{u}^{k+1})$ задачи (7), при котором $\bar{\sigma}^k > 0$.
4. На каждой итерации алгоритма можно вместо u^k пользоваться вектором $\bar{u}^k = \lambda_k u^k$ при любом $\lambda_k \in (0, 1]$. Далее можно описать правила определения λ_k такого, что использование на шаге 1 $\bar{u}^k$ вместо u^k приведет к выполнению условия $z^{k+1} \geqslant z^k$. При этом уменьшится также число ограничений в задачах (7).

Примечание при корректуре. Во время набора настоящей статьи автору стали известны результаты, изложенные в [4], где более подробно изучены свойства задач (2) и (3), а также предложен алгоритм решения задачи (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ху Т., Целочисленное программирование и потоки в сетях, М., «Мир», 1974.
2. Лебедев С. С., Экономика и матем. методы, **10**, вып. 3, 592—610 (1974).
3. Fisher, M. L., Shapiro, J. F., SIAM J. Appl. Math., **27**, № 1, 31—52 (1974).
4. Karwan, M. M., Rardin, R. L., Math. Programming, **17**, № 3, 320—334 (Nov. 1979).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 11/XI 1979

H. NARIPA

UUTE HINNANGUTE LEIDMISEST TÄISARVULISE LINEAARSE PLANEERIMISÜLESANDE SIHIFUNKTSIOONILE

Täisarvulist lineaarset planeerimisülesannet on vaadeldud kujul

$$Z_0 = \min_{x \in X} \{cx | Nx \leqslant b\},$$

kus $X = \{x | \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \equiv \beta, \ x \geqslant 0$ ja täisarv$\}$ määrab lineaarset kongruentside süsteemi rahuldavate täisarvuliste mittenegatiivsete punktide lõpmatu hulga. Selle ülesande sihifunktsiooni optimaalse väärtuse Z_0 alumise tõkke Z leidmiseks on konstrueeritud ülesanne

$$Z = \min_{z \geqslant 0} \max_{0 \leqslant u \leqslant e} \min_{x \in X} \{cx | z - cx + u(Nx - b) \leqslant 0, cx \leqslant z\}$$

ja esitatud lõplik iteratiivne algoritm selle lahendamiseks. Algoritmi igal sammul tuleb lahendada üks lineaarse lisakitsendusega rühmaminimeerimisülesanne ja üks lineaarne planeerimisülesanne.

H. NARIPA

ON FINDING ESTIMATIONS FOR THE OBJECTIVE FUNCTION OF A LINEAR INTEGER PROGRAMMING PROBLEM

A linear integer programming (IP) problem is considered in the form:

$$Z_0 = \min_{x\in X} \{cx \mid Nx \leqslant b\},$$

where $X = \{x \mid \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \equiv \beta,\ x \geqslant 0,\ x\text{—integer}\}$ determines an infinite set of non-negative integer points satisfying the system of linear congruences. One well-known way to find a lower bound for such a problem is to solve the corresponding group minimization problem $\min \{cx \mid x\in X\}$. To obtain a stronger bound, many authors have resorted to various approaches, using the Lagrange multipliers theory for integer problems. In this paper a synthesis of two such approaches is considered: one of these has been given by Lebedew and another by Fisher and Shapiro. The lower bound Z to the given IP problem is searched in the form:

$$Z = \min_{z\geqslant 0}\ \max_{0\leqslant u\leqslant e}\ \min_{x\in X} \{cx \mid z - cx + u(Nx - b) \leqslant 0,\ cx \leqslant z\}.$$

It is shown that the new bound is stronger than that of Fisher and Shapiro. Also, a finite iterative method for determining Z is described, at each step of which a group minimization problem with an additional linear constraint and a linear programming problem have to be solved. In addition to a relatively strong bound, this method also generates a set of integer points in the corner polyhedron corresponding to the IP problem. Each of these points satisfies a surrogate constraint and therefore in many cases it may prove possible to find exact solution to the IP problem.