EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 29. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1980, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 29
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1980, № 2

УДК 519.854

Л. КИВИСТИК

ДИСКРЕТНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С СЕПАРАБЕЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

(Представил А. Хумал)

Рассматривается общая дискретная задача математического программирования с сепарабельными функциями и, как частный случай, дискретная задача с кусочно-линейными функциями. Показывается, что в этом частном случае задача сводится к целочисленной задаче линейного программирования с дополнительными логическими условиями, а последняя, в свою очередь, к задаче с альтернативными условиями, для решения которой применим алгоритм из [1].

1. Общая задача

Рассмотрим сначала общую задачу дискретного программирования с сепарабельными функциями: максимизировать сумму

$$\sum_{j=1}^{n} f_{0j}(x_j) \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x_j) \leqslant c_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{2}$$

$$x_j \in \{b_{j0},\ b_{j1},\ \ldots,\ b_{jr_j}\} \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{3}$$

Введением новых булевых переменных z_{jk} эта задача сводится к полностью целочисленной задаче линейного программирования: максимизировать функцию

$$\sum_j \sum_k f_{0jk} z_{jk} \tag{4}$$

при ограничениях *

$$\sum_j \sum_k f_{ijk} z_{jk} \leqslant c_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{5}$$

$$\sum_k z_{jk} = 1 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{6}$$

$$z_{jk} \geqslant 0 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ r_j), \tag{7}$$

$$z_{jk} \text{ — целое } (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ r_j), \tag{8}$$

* Здесь и в дальнейшем индекс суммирования j изменяется от 1 до n, а индекс k от 0 до r_j.

где $f_{ijk}=f_{ij}(b_{jk})$. При этом первоначальные переменные x_j выражаются через новые формулой

$$x_j=\sum_k b_{jk}z_{jk}. \tag{9}$$

Подчеркнем, что в (1) и (2) функции $f_{ij}(x_j)$ могут быть совершенно произвольными, важно лишь то, чтобы они были определены в точках b_{jk} $(k=0, 1, \dots, r_j)$. Это, в частности, означает, что в случае непрерывных функций $f_{ij}(x_j)$ соответствующая непрерывная задача (1), (2) (при естественных дополнительных условиях $b_{j0}\leqslant x_j\leqslant b_{jr_j}$) может оказаться многоэкстремальной. Поэтому не стоит пытаться переносить на задачу (1)—(3), например, метод Дальтона—Луэлина ([2], см. также [3], с. 150—157), но ее решение переходом к задаче (4)—(8) кажется вполне естественным. При этом ограничения (6) позволяют легко получить единичный базис и двойственно-допустимую, а также l-нормальную форму симплексной таблицы.

Для решения задачи (4)—(8) можно использовать любой метод целочисленного программирования.

2. Задача с кусочно-линейными функциями

Рассмотрим теперь частный случай задачи (1)—(3), где $f_{ij}(x_j)$ $(i=0, 1, \dots, m)$ — кусочно-линейные непрерывные функции, определенные при фиксированном индексе j на заданном отрезке $a_j\leqslant x_j\leqslant b_j$ и имеющие угловые точки только при некоторых или всех значениях аргумента $x_j=b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{j,r_j-1}$ (предполагается, что $a_j\equiv\equiv b_{j0}<b_{j1}<b_{j2}<\dots<b_{j,r_j-1}<b_{jr_j}\equiv b_j$). Пусть, кроме того, вместо условий (3) имеются следующие условия дискретности:

$$\begin{gathered} x_j\in\{b_{j0}\equiv a_j,\ b_{j0}+\Delta b_{j0},\ \dots,\ b_{j0}+M_j\Delta b_{j0}\equiv b_{j1},\\ b_{j1}+\Delta b_{j1},\ \dots,\ b_{j1}+M_j\Delta b_{j1}\equiv b_{j2},\ \dots,\\ b_{j,r_j-1}+\Delta b_{j,r_j-1},\ \dots,\ b_{j,r_j-1}+M_j\Delta b_{j,r_j-1}\equiv b_j\}\\ (j=1, 2, \dots, n). \end{gathered} \tag{10}$$

Такими являются, например, условия целочисленности (все $\Delta b_{jk}=1$, a_j, b_j — целые) в предположении, что частичные отрезки $[b_{jk}, b_{j,k+1}]$, где все функции $f_{0j}(x_j), f_{1j}(x_j), \dots, f_{mj}(x_j)$ линейные, имеют длину M_j. Поставленную задачу можно также рассматривать как приближенную к непрерывной задаче (1), (2) при дополнительных условиях $a_j\leqslant\leqslant x_j\leqslant b_j$ $(j=1, 2, \dots, n)$. Действительно, такая задача возникает в случае приближения функций $f_{ij}(x_j)$ кусочно-линейными функциями (частичные отрезки $[b_{jk}, b_{j,k+1}]$ могут быть различной длины) и в случае замены непрерывной переменной x_j $(j=1, \dots, n)$ дискретной, изменяющейся на частичном отрезке $[b_{jk}, b_{j,k+1}]$ с шагом $\Delta b_{jk}==(b_{j,k+1}-b_{jk})/M_j$.

В данном случае рассматриваемая задача может быть также записана в форме (4)—(8), но с числом переменных $n+M_1r_1+\dots+M_nr_n$. Покажем, что возможна модель с числом переменных $n+r_1+\dots+r_n$ и дополнительным логическим условием, которое в ходе решения легко учитывается. Действительно, непрерывная кусочно-линейная функция $f_{ij}(x_j)$ представляется на отрезке $[a_j, b_j]$ в виде суммы

$$f_{ij}(x_j)=\sum_k f_{ijk}\lambda_{jk}, \tag{11}$$

где $f_{ijk}=f_{ij}(b_{jk})$ и переменные λ_{jk} удовлетворяют условиям

$$\sum_k \lambda_{jk}=1, \quad \lambda_{jk}\geqslant 0 \quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ r_j), \tag{12}$$

причем при каждом индексе j среди λ_{jk} $(k=0, 1, \ldots, r_j)$ положительными могут быть только один или два, в последнем случае они соседние (т. е. их вторые индексы отличаются друг от друга на единицу) (см. [4], с. 116—119). При этом переменная x_j на отрезке $[a_j, b_j]$ представляется в виде

$$x_j=\sum_k b_{jk}\lambda_{jk}. \tag{13}$$

Из-за условия дискретности (10) каждое λ_{jk} может принимать значения 0, $1/M_j$, $2/M_j$, ..., 1. Замена переменных $\lambda_{jk}=z_{jk}/M_j$ превратит это условие в условие целочисленности переменных z_{jk}.

В силу сказанного рассматриваемая задача формулируется следующим образом: максимизировать линейную функцию

$$\sum_j \sum_k (f_{0jk}/M_j)\, z_{jk} \tag{14}$$

при ограничениях

$$\sum_j \sum_k (f_{ijk}/M_j)\, z_{jk}\leqslant c_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{15}$$

$$\sum_k z_{jk}=M_j \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{16}$$

$$z_{jk}\geqslant 0,\ z_{jk} \text{ — целые при всех } j,\ k \tag{17}$$

и дополнительном условии

$$\left.\begin{array}{l}\text{при каждом индексе } j\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \text{ среди } z_{jk}\\ (k=0,\ 1,\ \ldots,\ r_j) \text{ положительными могут быть толь-}\\ \text{ко один или два, в последнем случае они соседние.}\end{array}\right\} \tag{18}$$

Введем дополнительные неотрицательные (непрерывные) переменные z_{0i} и воспользуемся обозначением $g_{ijk}=f_{ijk}/M_j$. Тогда максимизируемая целевая функция принимает вид

$$z_{00}=\sum_j \sum_k g_{0jk}z_{jk},$$

а неравенства (15) заменяются уравнениями

$$\sum_j \sum_k g_{ijk}z_{jk}+z_{0i}=c_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{19}$$

Ограничения (16)—(18) для индексов $j\neq 0$ при этом сохраняются. Тогда расширенная матрица рассматриваемой задачи содержит уже m единичных столбцов. Чтобы получить единичный базис и вместе с тем привести симплексную таблицу этой задачи к двойственно-допустимой форме, достаточно провести n симплексных преобразований с единичными ведущими элементами из строк, соответствующих уравнениям (16). При этом в j-м уравнении в качестве ведущего элемента следует выбирать коэффициент переменной z_{js_j}, где индекс s_j определяется условием

$$-g_{0js_j}=\min_{0\leqslant k\leqslant r_j}(-g_{0jk}).$$

Теперь целевая функция и все базисные переменные, соответствующие полученному единичному базису, выражаются через небазисные переменные

$$z_{jk}=a_{jk00}+\sum_{(r,s)\in N} a_{jkrs}(-z_{rs}), \qquad (j,k)\in B\cup\{(0,0)\}, \tag{20}$$

где B — множество пар базисных и N — множество пар небазисных индексов, а a_{jkrs} — коэффициенты, получаемые после этих симплексных преобразований. При этом

$$a_{00rs}\geqslant 0 \text{ для всех } (r,s)\in N. \tag{21}$$

Легко убедиться, что при $j\neq 0$ коэффициенты a_{jkrs} в (20) — целые числа.

Итак, вместо задачи (14)—(18) можем рассматривать эквивалентную ей задачу: максимизировать функцию

$$z_{00}=a_{0000}+\sum_{(r,s)\in N} a_{00rs}(-z_{rs}) \tag{22}$$

при ограничениях

$$z_{jk}=a_{jk00}+\sum_{(r,s)\in N} a_{jkrs}(-z_{rs})\geqslant 0, \qquad (j,k)\in B, \tag{23}$$

$$z_{rs}=-(-z_{rs})\geqslant 0, \qquad (r,s)\in N, \tag{24}$$

$$z_{jk} \text{ — целые при } j\neq 0 \text{ и при всех } k \tag{25}$$

и дополнительных условиях:

$$\left.\begin{array}{l}\text{при каждом индексе } j\ (j=1,2,\ldots,n) \text{ среди } z_{jk}\\ (k=0,1,\ldots,r_j) \text{ положительными могут быть}\\ \text{только один или два,}\end{array}\right\} \tag{26}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{если при некотором индексе } j\in\{1,2,\ldots,n\} \text{ среди}\\ z_{jk} \text{ имеются два положительных, то они соседние.}\end{array}\right\} \tag{27}$$

Предполагаем, что симплексная таблица, соответствующая соотношениям (22)—(24), т. е. матрица коэффициентов правых частей этих соотношений, является не только двойственно-допустимой, но и l-нормальной.

Как известно (см., напр., [5], с. 306—307), для решения задачи (22)—(25) (т. е. рассматриваемой задачи без условий (26) и (27)) применим полностью целочисленный алгоритм Гомори, хотя и не все коэффициенты целые. Целочисленность коэффициентов a_{jkrs} требуется только для тех индексов (j,k), при которых переменные z_{jk} должны быть целыми. Но это условие в задаче (22)—(27) выполняется. Для доказательства конечности алгоритма требуется, кроме того, чтобы все коэффициенты целевой функции a_{00rs} были целыми или рациональными числами. Поэтому в дальнейшем предполагается, что значения функций $f_{0jk}=f_{0j}(b_{jk})$ являются рациональными.

В следующем разделе покажем, что полностью целочисленный алгоритм Гомори распространяется и на задачу (22)—(27).

3. Решение поставленной задачи

Для решения задачи (22)—(27) воспользуемся алгоритмом, идея которого состоит в следующем. С помощью полностью целочисленного алгоритма Гомори l-нормальная симплексная таблица приводится к допустимой форме без учета условий (26) и (27). Если они выполняются, задача решена. Если нет, то по условиям (26) или (27) строится правильное отсечение полностью целочисленного алгоритма Гомори и таблица вновь приводится к допустимой форме с сохранением ее l-нормальности. Эта процедура повторяется до получения допустимого решения задачи (22)—(27), которое и будет оптимальным.

В ходе решения задачи (22)—(27) соотношения между переменными на каждом шаге сохраняют вид (22)—(24); изменяются только коэффициенты и множества базисных и небазисных индексов. Поэтому будем рассматривать коэффициенты a_{jkrs} и множества B, N как текущие, без какого-либо дополнительного индекса шага. Из (23) получается текущее базисное решение

$$z_{rs}=0 \text{ при } (r,s)\in N,\ z_{jk}=a_{jk00} \text{ при } (j,k)\in B, \tag{28}$$

которое, вообще говоря, является псевдопланом задачи (22)—(27).

Покажем, что логические условия (26) и (27) можно заменить альтернативными линейными неравенствами. Предположим, что базисное решение (28) уже оптимально для задачи (22)—(25), но не удовлетворяет условию (26). Это значит, что при некотором индексе $j\in$ $\in\{1, 2, \ldots, n\}$ во множество B входят пары (j,k_1), (j,k_2), ..., (j,k_p), где $p>2$, и имеют место неравенства

$$a_{jk_100}>0,\ a_{jk_200}>0,\ \ldots,\ a_{jk_p00}>0, \tag{29}$$

причем для этого индекса j остальные $a_{jk00}=0$.

Так как для выполнения условия (26) необходимо, чтобы среди z_{jk} $(k=k_1, k_2, \ldots, k_p)$ по крайней мере одно равнялось нулю, то введем альтернативное условие

$$z_{jk_1}\leqslant 0 \vee z_{jk_2}\leqslant 0 \vee \ldots \vee z_{jk_p}\leqslant 0. \tag{30}$$

Учитывая соотношения между переменными (23), получим, что должно выполняться по крайней мере одно из неравенств

$$a_{jk00}+\sum_{(r,s)\in N} a_{jkrs}(-z_{rs})\leqslant 0 \quad (k=k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_p). \tag{31}$$

Легко видеть, что если условие (26) выполняется, а (27) не выполняется, то последнее заменяется альтернативными условиями (30) или (31), где $p=2$.

Таким образом, решение задачи (22)—(27) сводится к решению частично целочисленной задачи линейного программирования с дополнительными альтернативными условиями. Решение аналогичной, но полностью целочисленной задачи с альтернативными условиями с помощью метода отсечения рассматривалось в [1]. Разница между задачами настоящей статьи и статьи [1] состоит, кроме того, в том, что здесь на каждом шаге используется «временная» система альтернативных условий (31), которая выясняется в ходе решения задачи, в то время как в [1] такие системы заданы уже в формулировке задачи. Но эти обстоятельства не мешают ни построению отсечений полностью целочисленного алгоритма Гомори по альтернативным условиям (31), ни применению алгоритма из [1].

Рассмотрим построение отсечения. Вне зависимости от того, при каком индексе k неравенство (31) выполняется, в силу (29) и (24) имеем

$$1 \leqslant \sum_{(r,s)\in N} \frac{a_{jkrs}}{a_{jk00}} z_{rs} \leqslant \sum_{(r,s)\in N} \left(\max_{k=k_1,\ldots,k_p} \frac{a_{jkrs}}{a_{jk00}} \right) z_{rs}. \qquad (32)$$

Обозначив

$$d_{jrs} = \max_{k=k_1,\ldots,k_p} (a_{jkrs}/a_{jk00}), \qquad (33)$$

получим

$$-1 + \sum_{(r,s)\in N} (-d_{jrs})(-z_{rs}) \geqslant 0. \qquad (34)$$

Неравенство (34) и есть правильное отсечение для задачи (22)—(27), так как, по построению, оно выполняется при каждом допустимом решении этой задачи, а не выполняется при псевдоплане (28), где $z_{rs} = 0$, $(r, s) \in N$.

Поскольку все небазисные переменные z_{rs} целые, то на основе неравенства (34) строится новое правильное отсечение с целыми коэффициентами

$$z_{l0} = [-1/\lambda] + \sum_{(r,s)\in N} [-d_{jrs}/\lambda](-z_{rs}) \geqslant 0, \qquad (35)$$

где λ выбирается по правилам полностью целочисленного алгоритма Гомори [3, 5, 6], а z_{l0} $(l > n)$ — новая целочисленная переменная для обозначения левой части неравенства (35). Если при приведении симплексной таблицы к допустимой форме (с помощью полностью целочисленного алгоритма Гомори) условия (26) и (27) еще не выполняются, построение отсечений (35) продолжается.

При решении задачи (22)—(27) можно пользоваться алгоритмом из [1], подробное изложение которого здесь не приводится. При этом следует иметь в виду, что в силу (16) дополнительного условия об ограниченности целевой функции на допустимом множестве не требуется. Доказательство конечности упомянутого алгоритма для задачи (22)—(27) ничем не отличается от доказательства конечности алгоритма с заданными альтернативными условиями [1].

Отметим, наконец, что было бы интересно рассмотреть задачу (22)—(27) без условия целочисленности (25). Легко видеть, что неравенство (34) есть правильное отсечение и для этой задачи. Но, к сожалению, получаемый алгоритм не является, вообще говоря, конечным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кивистик Л., Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., **25**, № 3. 245—250 (1976).
2. Dalton, R. E., Llewellyn, R. W., Manag. Sci., **12**, № 7, 562—575 (1966).
3. Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю., Дискретное программирование, М., «Наука», 1969.
4. Хедли Дж., Нелинейное и динамическое программирование, М., «Мир», 1967.
5. Ху Т., Целочисленное программирование и потоки в сетях, М., «Мир», 1974.
6. Гомори Р. Е., В кн.: Календарное планирование, М., «Прогресс», 1966, с. 227—240.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 11/XI 1979

L. KIVISTIK

SEPARAABLITE FUNKTSIOONIDEGA DISKREETSED PLANEERIMISÜLESANDED

Artikli esimeses punktis on separaablite funktsioonidega üldine diskreetne planeerimisülesanne taandatud täielikult täisarvuliseks lineaarseks planeerimisülesandeks. Teises ja kolmandas punktis on käsitletud ülesande üht erijuhtu, kus funktsioonid on tükiti lineaarsed. Üldjuhuga võrreldes saab nüüd ülesande taandada väiksema muutujate arvuga täisarvuliseks lineaarseks planeerimisülesandeks, kuid lisanduvad täiendavad loogilised tingimused. On näidatud, et nimetatud loogilised tingimused saab asendada alternatiivsete lineaarvõrratustega. Kui viimased pole rahuldatud, saab nende abil konstrueerida lõikekitsenduse ja kasutada autori poolt varem avaldatud algoritmi [1].

L. KIVISTIK

DISCRETE PROGRAMMING PROBLEMS WITH SEPARABLE FUNCTIONS

In the first section the general discrete separable programming problem with the objective function (1) and constraints (2), (3) is reduced to the all-integer programming problem (4)—(8). In the second and third sections a special case of the problem (1)—(3), in which $f_{0j}(x_j)$ and $f_{ij}(x_j)$ are piecewice linear functions and the constraints (3) are replaced by (10), is considered. This problem can also be reduced to a problem of the form (4)—(8), but with $n+M_1r_1+\ldots+M_nr_n$ variables. It is shown that the reduction to the all-integer problem (14)—(17) with $n+r_1+\ldots+r_n$ variables, and with additional logical constraints, is possible. By means of n elimination steps this problem is reduced to the form (22)—(25), for which the Gomory's all-integer algorithm is applicable, in spite of non-integrity of a part of coefficients and slack variables. If the optimal basic solution does not satisfy the additional logical constraints, they are replaced by the alternative constraints (30) or, which is the same, by the demand that at least one of the inequalities (31) is satisfied (validity of the inequalities (29) is assumed). By means of inequalities (31) the legitimate cut (35) is constructed, where d_{jrs} are defined by the formula (33) and λ is determined as in Gomory's all-integer algorithm. Thus, the considered problem may be solved by a finite algorithm presented in detail in the author's earlier paper [1].