EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 28. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1979, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 28
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1979, № 2

УДК 519.281

В. ОЛЬМАН

МИНИМАКСНОЕ ДОВЕРИТЕЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРА СДВИГА

V. OLMAN. NIHKEPARAMEETRI USALDATAVUSE MINIMAKSHINNANG

V. OLMAN. A MINIMAX CONFIDENCE ESTIMATION OF LOCATION PARAMETER

(Представлена Н. Алумяэ)

Рассмотрим стохастическую модель

$$\mathbf{Y}=\theta+\mathscr{E},\qquad E\mathscr{E}=\mathbf{O},\tag{1}$$

где $\mathbf{Y}$ и $\mathscr{E}$ — случайные m-мерные векторы, θ — неизвестный неслучайный m-мерный вектор. Задача заключается в построении минимаксного доверительного множества для оценивания θ при наблюденном векторе $\mathbf{Y}$. В отличие от [1–3], где решались аналогичные задачи, здесь используется априорная информация о принадлежности вектора θ некоторому множеству.

Предположим априори известным, что вектор θ принадлежит шару $K(r)$ радиуса r, т. е. $\theta^{\mathrm{T}}\theta\leqslant r^2$, где r — заданная величина. Ограничимся рассмотрением доверительных множеств, представимых эллипсоидами, центрированными линейными статистиками

$$N(k,\mathbf{u},\mathbf{D})=\{\theta\in R^m:(\theta-k\mathbf{Y}-\mathbf{u})^{\mathrm{T}}\mathbf{D}(\theta-k\mathbf{Y}-\mathbf{u})\leqslant 1\},$$

где $k\in R^1$, $\mathbf{u}\in R^m$, а $\mathbf{D}$ — неотрицательно определенная матрица порядка $(m\times m)$.

Определим качество доверительного оценивания величиной гарантированной вероятности $q(k,\mathbf{u},\mathbf{D})$ накрытия неизвестного вектора θ случайным эллипсоидом $N(k,\mathbf{u},\mathbf{D})$, т. е.

$$q(k,\mathbf{u},\mathbf{D})=\min_{\theta\in K(r)}P\{\theta\in N(k,\mathbf{u},\mathbf{D})\,|\,\theta\}.$$

Обозначим через M_γ класс квадратных матриц $\mathbf{D}$ таких, что лебеговская мера эллипсоида $\mu(N(k,\mathbf{u},\mathbf{D}))$ в пространстве параметра θ удовлетворяет ограничению

$$\mu(N(k,\mathbf{u},\mathbf{D}))\leqslant\gamma.$$

Тогда задача минимаксного оценивания запишется в виде

$$\max_{\mathbf{D}\in M_\gamma,\mathbf{u}\in R^m,k\in R^1} q(k,\mathbf{u},\mathbf{D}).\tag{2}$$

Теорема. *Пусть распределение вектора* $\mathscr{E}$ *в модели* (1) *сферически симметрично, т. е. функция плотности этого вектора* $f(\mathscr{E}) = g(\mathscr{E}^{\mathrm{T}}\mathscr{E})$, *причем* $g(t)$, $t \in (0, \infty)$, *выпуклая функция. Тогда задача* (2) *сводится к решению одномерной экстремальной задачи*

$$\max_{h \in R^1} \int\limits_{(e_1-(k-1)r)^2+\sum\limits_{i=2}^{m} e_i^2 \leqslant c^{-2}k^2} g(\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{e})\,d\mathbf{e}, \tag{3}$$

причем оптимальными являются $\mathbf{u}_0 = \mathbf{o}$ *и* $\mathbf{D}_0 = c\mathbf{I}_m$ ($\mathbf{I}_m$ — *единичная матрица порядка* $(m \times m)$), $\mathbf{D}_0 \in M_\gamma$.

Доказательство. Перепишем функцию $q(k, \mathbf{u}, \mathbf{D})$ в интегральном виде

$$q(k, \mathbf{u}, \mathbf{D}) = \min_{\theta \in K(r)} \int\limits_{H_1} f(\mathbf{y} - \theta)\,d\mathbf{y} = \min_{\theta \in K(r)} \int\limits_{H} g(\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{e})\,d\mathbf{e},$$

где $H_1 = \{\mathbf{y} \in R^m : (\theta - k\mathbf{y} - \mathbf{u})^{\mathrm{T}}\mathbf{D}(\theta - k\mathbf{y} - \mathbf{u}) \leqslant 1\}$,

$$H_2 = \{\mathbf{e} \in R^m : ((1-k)\theta - \mathbf{u} - k\mathbf{e})^{\mathrm{T}}\mathbf{D}((1-k)\theta - \mathbf{u} - k\mathbf{e}) \leqslant 1\}.$$

Пусть $0 \leqslant \lambda_1^2 \leqslant \lambda_2^2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m^2$ — собственные числа матрицы $\mathbf{D}$. Очевидно, случай $k = 1$ соответствует $r = \infty$. Обозначим через $\theta_0 \in K(r)$ вектор такой, что $\mathbf{V}_{\mathbf{u}} = (1-k)\theta_0 - \mathbf{u}$ — собственный вектор матрицы $\mathbf{D}$, соответствующий ее максимальному собственному числу, причем $(1-k)\theta_0^{\mathrm{T}}\mathbf{u} < 0$ $(k \neq 1)$. Тогда

$$q(k, \mathbf{u}, \mathbf{D}) \leqslant \int\limits_{(\mathbf{V}_{\mathbf{u}} - k\mathbf{e})^{\mathrm{T}}\mathbf{D}(\mathbf{V}_{\mathbf{u}} - k\mathbf{e}) \leqslant 1} g(\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{e})\,d\mathbf{e}. \tag{4}$$

В правой части неравенства (4) произведем ортогональную замену переменных $\mathbf{C}\mathbf{e} = \vec{\eta}$ так, чтобы $\mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} = \Lambda$ стала диагональной матрицей с элементами $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_m^2$ на главной диагонали. Получаем

$$q(k, \mathbf{u}, \mathbf{D}) \leqslant \int\limits_{G} g\Big(\sum_{i=1}^{m-1} \eta_i^2 + \eta_m^2\Big)\,d\vec{\eta}, \tag{5}$$

где $G = \{(\eta_1, \ldots, \eta_m) \in R^m : k^2 \sum\limits_{i=1}^{m-1} \lambda_i^2 \eta_i^2 + \lambda_m^2 (\|\mathbf{V}_{\mathbf{u}}\| - k\eta_m)^2 \leqslant 1\}$. Но в силу выбора вектора θ имеем

$$\|\mathbf{V}_{\mathbf{u}}\|^2 = (1-k)^2\theta_0^{\mathrm{T}}\theta_0 - 2(1-k)\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\theta_0 + \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} \geqslant (1-k)^2 r^2$$

и, следовательно (см. лемму 1 из [4]), правая часть неравенства (5) мажорируется величиной

$$\int\limits_{G_0} g\Big(\sum_{i=1}^{m-1} \eta_i^2 + \eta_m^2\Big)\,d\vec{\eta},$$

где $G_0 = \{(\eta_1, \ldots, \eta_m) \in R^m : k^2 \sum\limits_{i=1}^{m-1} \lambda_i^2 \eta_i^2 + \lambda_m^2 ((1-k)r - k\eta_m)^2 \leqslant 1\}$.

Используя лемму, сформулированную и доказанную в конце работы, получаем

$$\int\limits_{G_0} g(\vec{\eta}^{\mathrm{T}}\vec{\eta})\,d\vec{\eta} \leqslant \int\limits_{G_c} g(\vec{\eta}^{\mathrm{T}}\vec{\eta})\,d\vec{\eta}, \tag{6}$$

где $G_c = \{(\eta_1, \ldots, \eta_m) \in R^m : c^2(k^2 \sum_{i=1}^{m-1} \eta_i^2 + (k\eta_m - (1-k)r)^2) \leqslant 1\}$, причем $c^m = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i$, т. е. лебеговские объемы эллипсоидов $N(k, \mathbf{O}, \mathbf{D})$ и $N(k, \mathbf{O}, c^2\mathbf{I}_m)$ совпадают. Окончательно, в силу неравенств (5) и (6) получаем

$$\max_{k,\mathbf{u},\mathbf{D}} q(k, \mathbf{u}, \mathbf{D}) \leqslant \max_{k \in R^1} \int_{G_c} g(\eta^{\mathrm{T}}\eta) d\vec{\eta}. \tag{7}$$

Подстановка параметров $\mathbf{u} = \mathbf{o}$ и $\mathbf{D} = c^2\mathbf{I}_m$ в функцию $q(k, \mathbf{u}, \mathbf{D})$ обращает неравенство (7) в равенство и, следовательно, задача (2) сводится к решению одномерной экстремальной задачи (3), что и доказывает теорему.

Лемма. *Пусть* $N_\alpha(a, b) = \{(x, y) \in R^2 : (x-\alpha)^2/a^2 + y^2/b^2 \leqslant 1\}$, *т. е.* $N_\alpha(a, b)$ *— эллипс. Тогда для любой выпуклой на* $(0, \infty)$ *функции* $h(t)$ *при* $\alpha \in R^1$ *и* $b > a$ *имеем*

$$\int_{N_\alpha(a,b)} h(x^2+y^2) dx\, dy \leqslant \int_{N_\alpha(a_0,a_0)} h(x^2+y^2) dx\, dy,$$

где $N_\alpha(a_0, a_0)$ *— круг, лебеговская мера которого совпадает с лебеговской мерой эллипса* $N_\alpha(a, b)$, *т. е.* $a_0 = \sqrt{ab}$:

$$\mu(N_\alpha(a_0, a_0)) = \mu(N_\alpha(a, b)). \tag{8}$$

Доказательство. Введем обозначения

$$A_1 = \{(x, y) \in N_0(a_0, a_0) \setminus [N_0(a_0, a_0) \cap N_0(a, b)], x \geqslant 0, y \geqslant 0\},$$

$$A_2 = \{(x, y) \in N_0(a, b) \setminus [N_0(a_0, a_0) \cap N_0(a, b)], x \geqslant 0, y \geqslant 0\}.$$

Нетрудно заметить, что в силу (8)

$$\mu(A_1) = \mu(A_2). \tag{9}$$

Используя симметрию эллипса относительно оси OY, получаем

$$\begin{aligned} &\int_{N_\alpha(a_0,a_0)} h(x^2+y^2) dx\, dy - \int_{N_\alpha(a,b)} h(x^2+y^2) dx\, dy = \\ &= 2\Big[\int_{A_1} (h[(x+\alpha)^2+y^2] + h[(x-\alpha)^2+y^2]) dx\, dy - \\ &- \int_{A_2} (h[(x+\alpha)^2+y^2] + h[(x-\alpha)^2+y^2]) dx\, dy\Big]. \end{aligned} \tag{10}$$

Учитывая теорему о среднем и соотношение (9), перепишем равенство (10) в виде

$$\begin{aligned} &\int_{N_\alpha(a_0,a_0)} h(x^2+y^2) dx\, dy - \int_{N_\alpha(a,b)} h(x^2+y^2) dx\, dy = \\ &= 2\mu(A_1) [h((x_1+\alpha)^2+y_1^2) + h((x_1-\alpha)^2+y_1^2) - \\ &- h((x_2+\alpha)^2+y_2^2) - h((x_2-\alpha)^2+y_2^2)], \end{aligned} \tag{11}$$

где $(x_1, y_1) \in A_1$, $(x_2, y_2) \in A_2$. По определению множеств A_1 и A_2 получаем $x_1^2 + y_1^2 < x_2^2 + y_2^2$ и $x_1 > x_2 \geqslant 0$ и, следовательно, в силу выпуклости функции $h(\cdot)$, правая часть равенства (11) положительна, что и доказывает лемму.

Следствие. *Пусть* $N(\Lambda, \mathbf{l}) = \{\mathbf{x} \in R^m : (\mathbf{x}-\mathbf{l})^T \Lambda (\mathbf{x}-\mathbf{l}) \leqslant 1\}$, *где* Λ *— диагональная матрица с элементами* $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_m^2$ *на главной диагонали, а* $\mathbf{l}^T = (\alpha, 0, \ldots, 0)$. *Тогда для любой выпуклой на* $(0, \infty)$ *функции* $h(t)$, *любого* $\alpha \in R^1$ *и* $\lambda_1 \geqslant \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \lambda_i$ *справедливо*

$$\int\limits_{N(\lambda \mathbf{I}_m, \mathbf{l})} h(\mathbf{x}^T\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \geqslant \int\limits_{N(\lambda, \mathbf{l})} h(\mathbf{x}^T\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \qquad (12)$$

где λ *выбрано так, что* $\lambda^m = \det(\Lambda)$, *т. е. лебеговские объемы* $N(\lambda \mathbf{I}_m, \mathbf{l})$ *и* $N(\Lambda, \mathbf{l})$ *совпадают.*

Доказательство осуществляется переходом в (12) к повторному интегрированию и использованием леммы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алейнер Р. Ш., Докл. АН СССР, 196, № 5, 999—1001 (1971).
2. Albert, A., Ann. Math. Statistics, 37, № 6, 1602—1630 (1966).
3. Hartigan, I. A., Ann. Math. Statistics, 41, № 6, 1992—1998 (1970).
4. Ольман В., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 23, № 2, 127—134 (1974).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
22/XII 1978