EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 28. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1979, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 28
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1979, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1979.2.11

УДК 512.25/26+519.3; 330.115

Р. ЛЕПП

ДЕТЕРМИНИСТИЧЕСКИЕ ЭКВИВАЛЕНТЫ ЗАДАЧ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

R. LEPP. ELLIPTILISELT SÜMMEETRILISTE JAOTUSTEGA STOHHASTILISE PLANEERIMISE ÜLESANNETE DETERMINISTLIKUD EKVIVALENDID

R. LEPP. DETERMINISTIC EQUIVALENTS OF STOCHASTIC PROGRAMMING PROBLEMS WITH ELLIPTICALLY SYMMETRIC DISTRIBUTIONS

(Представлена Х. Абеном)

В данном сообщении обобщаются результаты работ [1–5] о детерминистических эквивалентах задач стохастического программирования с вероятностными ограничениями или целевой функцией, когда стохастичность определена многомерным нормальным вектором, имеющим любое многомерное эллиптически симметричное распределение. В первом пункте это делается для функции вероятности от линейного функционала, а во втором, где рассматриваются только частные случаи, от квадратичного функционала.

1. Пусть распределение случайного вектора η эллиптически симметрично относительно вектора c, т. е. плотность распределения $p(\eta)$ этого вектора представима в виде

$$p(\eta)=f((\eta-c)^{\mathrm{T}}A^{-1}(\eta-c)), \tag{1}$$

где A — положительно определенная матрица, c — фиксированный вектор, а $f(t)$, $0\leqslant t<\infty$, неотрицательная интегрируемая по Лебегу функция.

Рассмотрим следующую функцию вероятности

$$v(x)=\mathbf{P}[x^{\mathrm{T}}\eta\leqslant a]. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{P}$ — символ вероятности, a — заданное число и η — n-мерный случайный вектор.

Теорема 1. *Если распределение случайного вектора η эллиптически симметрично, множество Q компакт и $a>0$, то задача*

$$\max_{x\in Q}\mathbf{P}[x^{\mathrm{T}}\eta\leqslant a]$$

эквивалентна задаче

$$\sup_{x\in Q}(a-x^{\mathrm{T}}c)\,(x^{\mathrm{T}}Ax)^{-1/2}.$$

Доказательство. Сделав замену переменных $\eta = A^{-1/2}\xi + c$, получим

$$v(x) = (\det A)^{1/2} \int\limits_{x^{\mathsf T} A^{-1/2}\xi \leqslant a - x^{\mathsf T} c} f(\xi^{\mathsf T}\xi)\, d\xi.$$

Пусть C ортогональная матрица с первым столбцом $(A^{-1/2})^{\mathsf T}x/\|(A^{-1/2})^{\mathsf T}x\|$. Тогда очередное ортогональное преобразование $\nu = C\xi$ дает

$$v(x) = (\det A)^{1/2} \int\limits_{\nu_1 \leqslant (a - x^{\mathsf T} c)(x^{\mathsf T} A x)^{-1/2}} \varphi(\nu_1^2)\, d\nu_1, \tag{3}$$

где

$$\varphi(\nu_1^2) = \int\limits_{R^{n-1}} f(\nu_1^2 + \sum_{i=2}^{n} \nu_i^2)\, d\nu_2, \ldots, d\nu_n.$$

В силу свойств $f(\cdot)$ интеграл в (3) является неубывающей функцией своей верхней границы. Так как существует

$$\sup_{x \in Q} (a - x^{\mathsf T} c)(x^{\mathsf T} A x)^{-1/2},$$

то это значение верхней границы в (3) максимизирует $v(x)$.

Замечание. Варьируя матрицу C из доказательства теоремы 1, можно показать, что детерминистические эквиваленты линейных вероятностных задач с многомерными нормальными распределениями [1, 2, 4] и с многомерным распределением Коши [3] получаются при любом эллиптически симметричном распределении вектора η.

2. В [5] была рассмотрена следующая функция вероятности

$$u(x) = \mathbf{P}[x^{\mathsf T}\eta \cdot x^{\mathsf T} d \leqslant a], \tag{4}$$

где d — фиксированный вектор. Используя соответствующее ортогональное преобразование, можем эту функцию представить в следующем виде

$$u(x) = \int\limits_{\nu_1 \leqslant (a - x^{\mathsf T} c \cdot x^{\mathsf T} d)/((x^{\mathsf T} d)^2 (x^{\mathsf T} A x))^{-1/2}} \varphi(\nu_1^2)\, d\nu_1. \tag{5}$$

Отсюда нетрудно видеть, что задача

$$\max_{\substack{\mathbf{P}[x^{\mathsf T}\eta \cdot x^{\mathsf T} d \leqslant a] = \alpha \\ x \in Q}} a, \tag{6}$$

где α — фиксированная вероятность, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, эквивалентна задаче

$$\max_{x \in Q} (x^{\mathsf T} c + q^* (x^{\mathsf T} A x)^{1/2}) x^{\mathsf T} d \tag{7}$$

при любом эллиптически симметричном распределении вектора η. Здесь q^* — решение уравнения

$$\int\limits_{-\infty}^{q} \varphi(\nu_1^2)\, d\nu_1 = \alpha.$$

В замечании 2 работы [5] было отмечено, что если оба вектора η и d случайны, то детерминистический эквивалент задачи стохастического программирования с функцией $u(x)$ пока не поддается формулировке.

Теорема 2. *Задача*

$$\max_{x\in Q} \mathbf{P}[(x^{\mathrm{T}}\eta)^2\leqslant a^2] \tag{8}$$

при η, *распределенном эллиптически симметрично относительно начала координат, эквивалентна задаче*

$$\max_{x\in Q} (x^{\mathrm{T}}Ax)^{1/2}. \tag{9}$$

Доказательство. Преобразовав функцию $u(x)$ в задаче (8) к виду

$$u(x)=\int\limits_{-a(x^{\mathrm{T}}Ax)^{-1/2}\leqslant\nu_1\leqslant a(x^{\mathrm{T}}Ax)^{-1/2}} \varphi(\nu_1^2)\,d\nu_1,$$

видим, что максимум задачи (8) достигается на векторе, максимизирующем функцию $(x^{\mathrm{T}}Ax)^{1/2}$.

Следствие. Если $Q=\{x : x^{\mathrm{T}}x\geqslant r^2\}$ и если η распределен эллиптически симметрично относительно точки c, то максимум в задаче (8) достигается в точке x^*, в которой $\|x^*\|=r$ и $c^{\mathrm{T}}x^*=0$.

Теорема 3. *Задача*

$$\max_{x\in Q} \mathbf{P}[(x^{\mathrm{T}}\eta)\cdot(x^{\mathrm{T}}\xi)\leqslant a] \tag{10}$$

при независимых случайных векторах η *и* ξ, *распределенных эллиптически симметрично относительно начала координат, т. е. когда плотности распределения* η *и* ξ *представимы в виде* $f(\eta^{\mathrm{T}}A^{-1}\eta)$ *и* $g(\xi^{\mathrm{T}}B^{-1}\xi)$ *соответственно, эквивалентна задаче*

$$\min_{x\in Q} [(x^{\mathrm{T}}Ax)\cdot(x^{\mathrm{T}}Bx)]^{1/2}. \tag{11}$$

Доказательство. Преобразовав функцию вероятности $u(x)$ в задаче (10) к виду

$$u(x)=\iint\limits_{\nu_1\mu_1\leqslant a[(x^{\mathrm{T}}Ax)\cdot(x^{\mathrm{T}}Bx)]^{-1/2}} \varphi(\nu_1^2)\psi(\mu_1^2)\,d\mu_1\,d\nu_1,$$

видим, что максимум задачи (10) реализуется на векторе, минимизирующем задачу (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдин Д. Б., Математические методы управления в условиях неполной информации, М., «Сов. радио», 1974, с. 62—70.
2. Dragomirescu, M., Oper. Res., 20, № 1, 154—164 (1972).
3. Marti, K., Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 18, № 1, 159—166 (1971).
4. Kall, P., Stochastic linear programming, Berlin—Heidelberg—New York, Springer-Verlag, 1976, p. 83—88.
5. Swarup, K., Aggarwal, S. P., Gupta, R. K., Z. angew. Math. und Mech., 52, № 7, 371—373 (1972).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
12/XII 1978