Р. ЛЕПП

УДК 512.25/26+519.3; 330.115

ДЕТЕРМИНИСТИЧЕСКИЕ ЭКВИВАЛЕНТЫ ЗАДАЧ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

R. LEPP. ELLIPTILISELT SOMMEETRILISTE JAOTUSTEGA STOHASTILISE PLANEERIMISE
ÜLESANNETE DETERMINISTLIKUD EKVIIVALENDID

R. LEPP. DETERMINISTIC EQUIVALENTS OF STOCHASTIC PROGRAMMING PROBLEMS WITH
ELLIPTICALLY SYMMETRIC DISTRIBUTIONS

(Представлена Х. Абеном)

В данном сообщении обобщаются результаты работ [1-5] о детерминистических эквивалентах задач стохастического программирования с вероятностными ограничениями или целевой функцией, когда стохастичность определена многомерным нормальным вектором, имеющим любое многомерное эллиптически симметричное распределение. В первом пункте это делается для функции вероятности от линейного функционала, а во втором, где рассматриваются только частные случаи, от квадратичного функционала.

1. Пусть распределение случайного вектора η эллиптически симметрично относительно вектора c , т. е. плотность распределения $p(\eta)$ этого вектора представима в виде

$$p(\eta) = f((\eta - c)^T A^{-1} (\eta - c)), \quad (1)$$

где A — положительно определенная матрица, c — фиксированный вектор, а $f(t)$, $0 \leq t < \infty$, неотрицательная интегрируемая по Лебегу функция.

Рассмотрим следующую функцию вероятности

$$v(x) = P[x^T \eta \leq a]. \quad (2)$$

Здесь P — символ вероятности, a — заданное число и η — n -мерный случайный вектор.

Теорема 1. Если распределение случайного вектора η эллиптически симметрично, множество Q компактно и $a > 0$, то задача

$$\max_{x \in Q} P[x^T \eta \leq a]$$

эквивалентна задаче

$$\sup_{x \in Q} (a - x^T c) (x^T A x)^{-1/2}.$$

Доказательство. Сделав замену переменных $\eta = A^{-1/2}\xi + c$, получим

$$v(x) = (\det A)^{1/2} \int_{x^T A^{-1/2} \xi \leq a - x^T c} f(\xi^T \xi) d\xi.$$

Пусть C ортогональная матрица с первым столбцом $(A^{-1/2})^T x / \|(A^{-1/2})^T x\|$. Тогда очередное ортогональное преобразование $v = C\xi$ дает

$$v(x) = (\det A)^{1/2} \int_{v_1 \leq (a - x^T c)(x^T A x)^{-1/2}} \varphi(v_1^2) dv_1, \quad (3)$$

где

$$\varphi(v_1^2) = \int_{R^{n-1}} f(v_1^2 + \sum_{i=2}^n v_i^2) dv_2, \dots, dv_n.$$

В силу свойств $f(\cdot)$ интеграл в (3) является неубывающей функцией своей верхней границы. Так как существует

$$\sup_{x \in Q} (a - x^T c)(x^T A x)^{-1/2},$$

то это значение верхней границы в (3) максимизирует $v(x)$.

З а м е ч а н и е. Варьируя матрицу C из доказательства теоремы 1, можно показать, что детерминистические эквиваленты линейных вероятностных задач с многомерными нормальными распределениями [1, 2, 4] и с многомерным распределением Коши [3] получаются при любом эллиптически симметричном распределении вектора η .

2. В [5] была рассмотрена следующая функция вероятности

$$u(x) = P[x^T \eta \cdot x^T d \leq a], \quad (4)$$

где d — фиксированный вектор. Используя соответствующее ортогональное преобразование, можем эту функцию представить в следующем виде

$$u(x) = \int_{v_1 \leq (a - x^T c \cdot x^T d) / ((x^T d)^2 (x^T A x))^{-1/2}} \varphi(v_1^2) dv_1. \quad (5)$$

Отсюда нетрудно видеть, что задача

$$\max_{x \in Q} a, \quad P[x^T \eta \cdot x^T d \leq a] = \alpha \quad (6)$$

где α — фиксированная вероятность, $0 \leq \alpha \leq 1$, эквивалентна задаче

$$\max_{x \in Q} (x^T c + q^* (x^T A x)^{1/2}) x^T d \quad (7)$$

при любом эллиптически симметричном распределении вектора η . Здесь q^* — решение уравнения

$$\int_{-\infty}^q \varphi(v_1^2) dv_1 = \alpha.$$

В замечании 2 работы [5] было отмечено, что если оба вектора η и d случайны, то детерминистический эквивалент задачи стохастического программирования с функцией $u(x)$ пока не поддается формулировке.

Теорема 2. Задача

$$\max_{x \in Q} P[(x^T \eta)^2 \leq a^2] \quad (8)$$

при η , распределенном эллиптически симметрично относительно начала координат, эквивалентна задаче

$$\max_{x \in Q} (x^T A x)^{1/2}. \quad (9)$$

Доказательство. Преобразовав функцию $u(x)$ в задаче (8) к виду

$$u(x) := \int_{-a(x^T A x)^{-1/2} \leq v_1 \leq a(x^T A x)^{-1/2}} \varphi(v_1^2) dv_1,$$

видим, что максимум задачи (8) достигается на векторе, максимизирующем функцию $(x^T A x)^{1/2}$.

Следствие. Если $Q = \{x : x^T x \geq r^2\}$ и если η распределен эллиптически симметрично относительно точки c , то максимум в задаче (8) достигается в точке x^* , в которой $\|x^*\| = r$ и $c^T x^* = 0$.

Теорема 3. Задача

$$\max_{x \in Q} P[(x^T \eta) \cdot (x^T \xi) \leq a] \quad (10)$$

при независимых случайных векторах η и ξ , распределенных эллиптически симметрично относительно начала координат, т. е. когда плотности распределения η и ξ представимы в виде $f(\eta^T A^{-1} \eta)$ и $g(\xi^T B^{-1} \xi)$ соответственно, эквивалентна задаче

$$\min_{x \in Q} [(x^T A x) \cdot (x^T B x)]^{1/2}. \quad (11)$$

Доказательство. Преобразовав функцию вероятности $u(x)$ в задаче (10) к виду

$$u(x) := \iint_{v_1 \mu_1 \leq a[(x^T A x) \cdot (x^T B x)]^{-1/2}} \varphi(v_1^2) \psi(\mu_1^2) d\mu_1 dv_1,$$

видим, что максимум задачи (10) реализуется на векторе, минимизирующем задачу (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдин Д. Б., Математические методы управления в условиях неполной информации, М., «Сов. радио», 1974, с. 62—70.
2. Dragomirescu, M., Oper. Res., 20, № 1, 154—164 (1972).
3. Marti, K., Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 18, № 1, 159—166 (1971).
4. Kall, P., Stochastic linear programming, Berlin—Heidelberg—New York, Springer-Verlag, 1976, p. 83—88.
5. Swarup, K., Aggarwal, S. P., Gupta, R. K., Z. angew. Math. und Mech., 52, № 7, 371—373 (1972).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
12/XII 1978