EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 28. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1979, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 28
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1979, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1979.2.09

УДК 518 : 517.392

М. ЛЕВИН

ОДНА ОПТИМАЛЬНАЯ В СМЫСЛЕ V-МЕТОДА КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА

M. LEVIN. V-MEETODI MÕTTES OPTIMAALNE KVADRATUURVALEM

M. LEVIN. EINE IM SINNE DER V-METHODE OPTIMALE QUADRATURFORMEL

(Представлена А. Хумалом)

При заданных n, p, q обозначим через $C_{01}^{n+p+q+1}$ множество всех функций $f(x)$, имеющих на отрезке $[0;1]$ непрерывную производную порядка $n+p+q+1$ и удовлетворяющих условию

$$f^{(i)}(0)=f^{(j)}(1)=0 \quad (i=0,\ \ldots,\ p-1;\ j=0,\ \ldots,\ q-1). \tag{1}$$

Для функций этого множества рассмотрим квадратурные формулы при $0<x_1<x_2<\ldots<x_m<1$

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_{k=0}^{m} A_k f(x_k)+R(f), \tag{2}$$

точные для $x^p(x-1)^q P_n(x)$, где $P_n(x)$ — произвольный многочлен степени $\leqslant n$. Последнее требование на точность естественно в виду ограничения (1) на $f(x)$.

Ниже будем считать, что $m<n\leqslant 2m+1$. Это ограничение при определенных узлах определяет однозначно веса формулы (2). Действительно, обозначив $\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_m)$, через $\delta[f(x)]=f[x,\underbrace{0,\ldots,0}_{p},\underbrace{1,\ldots,1}_{q},x_0,\ldots,x_m]$ — разделенную разность, мы, интегрируя интерполяционную формулу Эрмита [1]

$$f(x)=\sum_{k=0}^{m} L_k(x)f(x_k)+\sum_{i=0}^{p-1}\alpha_i(x)f^{(i)}(0)+\sum_{j=0}^{q-1}\beta_j(x)f^{(j)}(1)+r(f;x), \tag{3}$$

где $r(f;x)=x^p(x-1)^q\delta[f(x)]\omega(x)$, получим формулу (2), точную для всех многочленов $x^p(x-1)^qP_m(x)$. При этом

$$A_k=\int_0^1 L_k(x)\,dx \quad (k=0,\ \ldots,\ m), \tag{4}$$

$$R(f)=\int_0^1 x^p(x-1)^q\omega(x)\,\delta[f(x)]\,dx. \tag{5}$$

Увеличить точность полученной таким образом формулы можно только путем выбора узлов.

Итак, рассматриваем формулы (2), точные для $x^p(x-1)^q P_n(x)$. Для этих формул и $f(x)\in C_{01}^{n+p+q+1}$ выполнены соотношения (4), (5).

Следуя Ф. Лохеру [2], определим число $r=n-m$ и функции

$$V_0(x)=x^p(x-1)^q\omega(x),\qquad V_i(x)=\int_0^x V_{i-1}(x)\,dx\qquad (i=1,\ \ldots,\ r).$$

Очевидно, что $V_1(0)=\ldots=V_r(0)=0$. Кроме того,

$$V_1(1)=\ldots=V_r(1)=0. \tag{6}$$

Действительно,

$$V_1(1)=\int_0^1 V_0(x)\,dx=\int_0^1 V_0(x)\,\delta[x^p(x-1)^q x^{m+1}]\,dx\cdot(m+p+q+1)!=$$

$$=(m+p+q+1)!\,R(x^p(x-1)^q x^{m+1})=0,$$

$$V_2(1)=\int_0^1 V_1(x)\,\delta'[x^p(x-1)^q x^{m+2}]\,dx\cdot(m+p+q+2)!=$$

$$=(m+p+q+2)!\{V_1(x)\,\delta[x^p(x-1)^q x^{m+2}]\,|_0^1-\int_0^1 V_0(x)\,\delta[x^p(x-1)^q\times$$

$$\times x^{m+2}]\,dx\}=-R(x^p(x-1)^q x^{m+2})\,(m+p+q+2)!=0 \quad \text{и т. д.}$$

Поэтому с помощью интегрирования по частям из равенства

$$R(f)=\int_0^1 V_r^{(r)}(x)\,\delta[f(x)]\,dx \tag{7}$$

получаем, что

$$R(f)=(-1)^r\int_0^1 V_r(x)\,\delta^{(r)}[f(x)]\,dx. \tag{8}$$

Очевидно и обратное: если квадратурная формула с узлами $x_0,\ldots,x_m$ точна для любого многочлена $x^p(x-1)^q P_m(x)$ и выполнено условие (6), то эта формула точна и для любого многочлена $x^p(x-1)^q P_n(x)$.

Рассмотрим теперь множество только тех формул (2), для которых

$$V_r(x)\geqslant 0\quad \forall x\in[0;1]^*. \tag{9}$$

Для этих формул из (8) следует, что

$$R(f)=(-1)^r\delta^{(r)}[f(\xi)]\int_0^1 V_r(x)\,dx\qquad (0<\xi<1). \tag{10}$$

Формулу (2) назовем, согласно [2], оптимальной в смысле V-метода для множества $C_{01}^{n+p+q+1}$, если для нее выполнено (9) и величина

$$\int_0^1 V_r(x)\,dx \tag{11}$$

имеет наименьшее значение. Найдем такую формулу.

Л е м м а. *Пусть суммируемая на* $[0;1]$ *функция* $p(x)\not\equiv 0$, $p(x)\geqslant 0$, *а многочлен* $Q_n(x)=x^n+a_1^*x^{n-1}+\ldots+a_n^*$ *ортогонален к любому*

---

* Если $V_r(x)\leqslant 0$ $\forall x\in[0;1]$, то в (8) выносим множитель (-1) за знак интеграла и продолжаем приводимые ниже рассуждения.

многочлену степени $\leqslant n-1$ по весу $p(x)$ на отрезке $[0;1]$. Тогда для любого многочлена $P_{2n}(x)=x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\ldots+a_{2n}$, неотрицательного на $[0;1]$, справедливо неравенство

$$\int_0^1 p(x)Q_n^2(x)\,dx \leqslant \int_0^1 p(x)P_{2n}(x)\,dx, \qquad (12)$$

причем равенство выполнено только при $P_{2n}(x)=Q_n{}^2(x)$.

Доказательство. Представив многочлен $P_{2n}(x)$ в виде

$$P_{2n}(x)=Q_n(x)P_n(x)+P_{n-1}(x),$$

имеем

$$\int_0^1 p(x)P_{2n}(x)\,dx=\int_0^1 p(x)Q_n(x)P_n(x)\,dx+\int_0^1 p(x)P_{n-1}(x)\,dx=$$

$$=\int_0^1 p(x)Q_n^2(x)\,dx+\int_0^1 p(x)P_{n-1}(x)\,dx. \qquad (13)$$

Пусть $x_1,\ldots,x_n$ — нули многочлена $Q_n(x)$. Тогда при $P_{n-1}(x)\not\equiv 0$

$$P_{n-1}(x_i)=P_{2n}(x_i)\geqslant 0 \quad (i=1,\ldots,n),$$

причем хотя бы в одном узле $P_{n-1}(x_i)>0$. Но тогда по квадратурной формуле типа Гаусса

$$\int_0^1 p(x)P_{n-1}(x)\,dx=\sum_{i=1}^n B_iP_{n-1}(x_i)>0,$$

так как $B_i>0$ $(i=1,\ldots,n)$. Поэтому из (13) сразу следует (12), где равенство будет выполнено только при $P_{n-1}(x)\equiv 0$.

Если $P_{n-1}(x)\equiv 0$, то $P_{2n}(x)=Q_n(x)P_n(x)$. Поскольку $P_{2n}(x)\geqslant 0$ на $[0;1]$, то $P_n(x)$ имеет те же нули, что и $Q_n(x)$, т. е. $P_{2n}(x)=Q_n{}^2(x)$. Лемма доказана.

Из вышеприведенных свойств многочлена $V_r(x)$ видно, что он имеет вид

$$V_r(x)=x^{r+p}(1-x)^{r+q}P_{m+1-r}(x),$$

где $P_{m+1-r}(x)$ — некоторый многочлен степени $m+1-r$, неотрицательный на $[0;1]$ и имеющий старшим коэффициентом $(-1)^{r+q}(m+1+p+q)!/(m+1+r+p+q)!$.

Пусть $P_k{}^{(\alpha,\beta)}(x)$ — многочлен степени k, ортогональный к любому многочлену степени $<k$ по весу $x^\alpha(1-x)^\beta$ на отрезке $[0;1]$ и имеющий старшим коэффициентом 1.

Считая для конкретности число $m+1-r$ четным, получаем по лемме, что наименьшее значение интегралу (11) доставляет многочлен

$$V_r(x)=Cx^{r+p}(1-x)^{r+q}[P^{(r+p,r+q)}_{(m+1-r)/2}(x)]^2. \qquad (14)$$

Этому многочлену по определению $V_0(x)$ соответствует многочлен

$$\omega(x)=x^{-p}(1-x)^{-q}V_0(x)=$$
$$=Cx^{-p}(1-x)^{-q}\{x^{r+p}(1-x)^{r+q}[P^{(r+p,r+q)}_{(m+1-r)/2}(x)]^2\}^{(r)}. \qquad (15)$$

С помощью теоремы Ролля легко видеть, что многочлен (15) имеет на $(0;1)$ ровно $m+1$ нулей.

Поскольку многочлен (14) удовлетворяет условиям

$$V_r(0) = V'_r(0) = \ldots = V_r^{(r-1)}(0) = V_r(1) = V'_r(1) = \ldots = V_r^{(r-1)}(1) = 0,$$

следовательно, и ему соответствует формула (2) с остатком (10).

Итак, доказана

Теорема 1. *При четном* $m+1-r$ *оптимальная для множества* $C_{01}^{n+p+q+1}$ *в смысле* V*-метода формула* (2) *имеет узлы, являющиеся нулями многочлена* (15), *веса* (4) *и остаток* (10), *где многочлен* $V_r(x)$ *определен в* (14).

Замечание. При $p=q=0$ полученный результат совпадает с соответствующим результатом [2]. Случай с нечетным $m+1-r$ может быть рассмотрен аналогично.

Точно так же доказывается для четного $m+1-r$

Теорема 2. *Для функций* $f(x)$, *имеющих на* $[0;1]$ *непрерывную производную порядка* $n+p+q+1$, *оптимальная в смысле* V*-метода и точная для многочленов степени* $n+p+q$ *квадратурная формула типа Маркова*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{p-1} C_i f^{(i)}(0) + \sum_{k=0}^{m} A_k f(x_k) + \sum_{j=0}^{q-1} B_j f^{(j)}(1) + R(f)$$

имеет узлы, являющиеся нулями многочлена (15), *веса* (4),

$$C_i = \int_0^1 \alpha_i(x)\,dx, \quad B_j = \int_0^1 \beta_j(x)\,dx \quad (i=0,\ \ldots,\ p-1;\ j=0,\ \ldots,\ q-1)$$

и остаток (10), *где* $V_r(x)$ *определен в* (14).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, М., Физматгиз, 1959.
2. Locher, F., Numer. Math., 20, № 4, 317—326 (1973).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 20/X 1978