

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 28. KOIDE
FÜSIKA * MATEMAATIKA. 1979, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 28
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1979, № 2

УДК 518 : 517.392

М. ЛЕВИН

ОДНА ОПТИМАЛЬНАЯ В СМЫСЛЕ V-МЕТОДА КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА

M. LEVIN. V-MEETODI MOTTES OPTIMAALNE KVADRATUURVALEM

M. LEVIN. EINE IM SINNE DER V-METHODE OPTIMALE QUADRATURFORMEL

(Представлена А. Хумалом)

При заданных n, p, q обозначим через $C_{01}^{n+p+q+1}$ множество всех функций $f(x)$, имеющих на отрезке $[0; 1]$ непрерывную производную порядка $n + p + q + 1$ и удовлетворяющих условию

$$f^{(i)}(0) = f^{(j)}(1) = 0 \quad (i=0, \dots, p-1; j=0, \dots, q-1). \quad (1)$$

Для функций этого множества рассмотрим квадратурные формулы при $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m < 1$

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=0}^m A_k f(x_k) + R(f), \quad (2)$$

точные для $x^p(x-1)^q P_n(x)$, где $P_n(x)$ — произвольный многочлен степени $\leq n$. Последнее требование на точность естественно в виду ограничения (1) на $f(x)$.

Ниже будем считать, что $m < n \leq 2m + 1$. Это ограничение при определенных узлах определяет однозначно веса формулы (2). Действительно, обозначив $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_m)$, через $\delta[f(x)] = f[\underbrace{x, 0, \dots, 0}_p, \underbrace{1, \dots, 1}_q, x_0, \dots, x_m]$ — разделенную разность, мы,

интегрируя интерполяционную формулу Эрмита [1]

$$f(x) = \sum_{k=0}^m L_k(x) f(x_k) + \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i(x) f^{(i)}(0) + \sum_{j=0}^{q-1} \beta_j(x) f^{(j)}(1) + r(f; x), \quad (3)$$

где $r(f; x) = x^p(x-1)^q \delta[f(x)] \omega(x)$, получим формулу (2), точную для всех многочленов $x^p(x-1)^q P_m(x)$. При этом

$$A_k = \int_0^1 L_k(x) dx \quad (k=0, \dots, m), \quad (4)$$

$$R(f) = \int_0^1 x^p(x-1)^q \omega(x) \delta[f(x)] dx. \quad (5)$$

Увеличить точность полученной таким образом формулы можно только путем выбора узлов.

Итак, рассматриваем формулы (2), точные для $x^p(x-1)^q P_n(x)$. Для этих формул и $f(x) \in C_{01}^{n+p+q+1}$ выполнены соотношения (4), (5).

Следуя Ф. Лохеру [2], определим число $r = n - m$ и функции

$$V_0(x) = x^p(x-1)^q \omega(x), \quad V_i(x) = \int_0^x V_{i-1}(x) dx \quad (i=1, \dots, r).$$

Очевидно, что $V_1(0) = \dots = V_r(0) = 0$. Кроме того,

$$V_1(1) = \dots = V_r(1) = 0. \quad (6)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} V_1(1) &= \int_0^1 V_0(x) dx = \int_0^1 V_0(x) \delta[x^p(x-1)^q x^{m+1}] dx \cdot (m+p+q+1)! = \\ &= (m+p+q+1)! R(x^p(x-1)^q x^{m+1}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2(1) &= \int_0^1 V_1(x) \delta'[x^p(x-1)^q x^{m+2}] dx \cdot (m+p+q+2)! = \\ &= (m+p+q+2)! \{V_1(x) \delta[x^p(x-1)^q x^{m+2}]|_0^1 - \int_0^1 V_0(x) \delta[x^p(x-1)^q \times \\ &\times x^{m+2}] dx\} = -R(x^p(x-1)^q x^{m+2}) (m+p+q+2)! = 0 \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Поэтому с помощью интегрирования по частям из равенства

$$R(f) = \int_0^1 V_r^{(r)}(x) \delta[f(x)] dx \quad (7)$$

получаем, что

$$R(f) = (-1)^r \int_0^1 V_r(x) \delta^{(r)}[f(x)] dx. \quad (8)$$

Очевидно и обратное: если квадратурная формула с узлами x_0, \dots, x_m точна для любого многочлена $x^p(x-1)^q P_m(x)$ и выполнено условие (6), то эта формула точна и для любого многочлена $x^p(x-1)^q P_n(x)$.

Рассмотрим теперь множество только тех формул (2), для которых

$$V_r(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0; 1]^*. \quad (9)$$

Для этих формул из (8) следует, что

$$R(f) = (-1)^r \delta^{(r)}[f(\xi)] \int_0^1 V_r(x) dx \quad (0 < \xi < 1). \quad (10)$$

Формулу (2) назовем, согласно [2], оптимальной в смысле V -метода для множества $C_{01}^{n+p+q+1}$, если для нее выполнено (9) и величина

$$\int_0^1 V_r(x) dx \quad (11)$$

имеет наименьшее значение. Найдем такую формулу.

Лемма. Пусть суммируемая на $[0; 1]$ функция $p(x) \not\equiv 0$, $p(x) \geq 0$, а многочлен $Q_n(x) = x^n + a_1^* x^{n-1} + \dots + a_n^*$ ортогонален к любому

* Если $V_r(x) \leq 0 \quad \forall x \in [0; 1]$, то в (8) выносим множитель (-1) за знак интеграла и продолжаем приводимые ниже рассуждения.

многочлену степени $\leq n-1$ по весу $p(x)$ на отрезке $[0; 1]$. Тогда для любого многочлена $P_{2n}(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \dots + a_{2n}$, неотрицательного на $[0; 1]$, справедливо неравенство

$$\int_0^1 p(x) Q_n^2(x) dx \leq \int_0^1 p(x) P_{2n}(x) dx, \quad (12)$$

причем равенство выполнено только при $P_{2n}(x) = Q_n^2(x)$.

Доказательство. Представив многочлен $P_{2n}(x)$ в виде

$$P_{2n}(x) = Q_n(x)P_n(x) + P_{n-1}(x),$$

имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 p(x) P_{2n}(x) dx &= \int_0^1 p(x) Q_n(x) P_n(x) dx + \int_0^1 p(x) P_{n-1}(x) dx = \\ &= \int_0^1 p(x) Q_n^2(x) dx + \int_0^1 p(x) P_{n-1}(x) dx. \end{aligned} \quad (13)$$

Пусть x_1, \dots, x_n — нули многочлена $Q_n(x)$. Тогда при $P_{n-1}(x) \not\equiv 0$

$$P_{n-1}(x_i) = P_{2n}(x_i) \geq 0 \quad (i=1, \dots, n),$$

причем хотя бы в одном узле $P_{n-1}(x_i) > 0$. Но тогда по квадратурной формуле типа Гаусса

$$\int_0^1 p(x) P_{n-1}(x) dx = \sum_{i=1}^n B_i P_{n-1}(x_i) > 0,$$

так как $B_i > 0$ ($i=1, \dots, n$). Поэтому из (13) сразу следует (12), где равенство будет выполнено только при $P_{n-1}(x) \equiv 0$.

Если $P_{n-1}(x) \equiv 0$, то $P_{2n}(x) = Q_n(x)P_n(x)$. Поскольку $P_{2n}(x) \geq 0$ на $[0; 1]$, то $P_n(x)$ имеет те же нули, что и $Q_n(x)$, т. е. $P_{2n}(x) = Q_n^2(x)$. Лемма доказана.

Из вышеприведенных свойств многочлена $V_r(x)$ видно, что он имеет вид

$$V_r(x) = x^{r+p}(1-x)^{r+q} P_{m+1-r}(x),$$

где $P_{m+1-r}(x)$ — некоторый многочлен степени $m+1-r$, неотрицательный на $[0; 1]$ и имеющий старшим коэффициентом $(-1)^{r+q}(m+1+p+q)!/(m+1+r+p+q)!$.

Пусть $P_k^{(\alpha, \beta)}(x)$ — многочлен степени k , ортогональный к любому многочлену степени $< k$ по весу $x^\alpha(1-x)^\beta$ на отрезке $[0; 1]$ и имеющий старшим коэффициентом 1.

Считая для конкретности число $m+1-r$ четным, получаем по лемме, что наименьшее значение интеграла (11) доставляет многочлен

$$V_r(x) = C x^{r+p}(1-x)^{r+q} [P_{(m+1-r)/2}^{(r+p, r+q)}(x)]^2. \quad (14)$$

Этому многочлену по определению $V_0(x)$ соответствует многочлен

$$\begin{aligned} \omega(x) &= x^{-p}(1-x)^{-q} V_0(x) = \\ &= C x^{-p}(1-x)^{-q} \{x^{r+p}(1-x)^{r+q} [P_{(m+1-r)/2}^{(r+p, r+q)}(x)]^2\}^{(r)}. \end{aligned} \quad (15)$$

С помощью теоремы Ролля легко видеть, что многочлен (15) имеет на $(0; 1)$ ровно $m+1$ нулей.

Поскольку многочлен (14) удовлетворяет условиям

$$V_r(0) = V'_r(0) = \dots = V^{(r-1)}_r(0) = V_r(1) = V'_r(1) = \dots = V^{(r-1)}_r(1) = 0,$$

следовательно, и ему соответствует формула (2) с остатком (10).

Итак, доказана

Теорема 1. При четном $m+1-r$ оптимальная для множества $C_{01}^{n+p+q+1}$ в смысле V -метода формула (2) имеет узлы, являющиеся нулями многочлена (15), веса (4) и остаток (10), где многочлен $V_r(x)$ определен в (14).

Замечание. При $p=q=0$ полученный результат совпадает с соответствующим результатом [2]. Случай с нечетным $m+1-r$ может быть рассмотрен аналогично.

Точно так же доказывается для четного $m+1-r$

Теорема 2. Для функций $f(x)$, имеющих на $[0; 1]$ непрерывную производную порядка $n+p+q+1$, оптимальная в смысле V -метода и точная для многочленов степени $n+p+q$ квадратурная формула типа Маркова

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{i=0}^{p-1} C_i f^{(i)}(0) + \sum_{k=0}^m A_k f(x_k) + \sum_{j=0}^{q-1} B_j f^{(j)}(1) + R(f)$$

имеет узлы, являющиеся нулями многочлена (15), веса (4),

$$C_i = \int_0^1 \alpha_i(x) dx, \quad B_j = \int_0^1 \beta_j(x) dx \quad (i=0, \dots, p-1; j=0, \dots, q-1)$$

и остаток (10), где $V_r(x)$ определен в (14).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, М., Физматгиз, 1959.
2. Locher, F., Numer. Math., 20, № 4, 317—326 (1973).

Таллинский политехнический
институт

Поступила в редакцию
20/X 1978