EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 28. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1979, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 28
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1979, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1979.2.04

УДК 539.28

В. СИНИВЕЭ

ГРУППОВОЙ ПОДХОД В ДИНАМИКЕ МНОГОСПИНОВЫХ СИСТЕМ. VI

(Представлена Э. Липпмаа)

Тема данной статьи — динамика абстрактной трехуровневой системы — не исчерпывается изложенным. Здесь рассматривается широкий класс пропагаторов, построенных в виде произведения трех экспонент, и дается перечень более простых поддинамик, описываемых пропагаторами представлений группы $SU(2)$ в группе $SU(3)$.

10. Динамика трехуровневой системы

10.1. Супероператорное представление группы $\mathfrak{u}_3$. Выберем совокупность собственных векторов a_m $(m=1,2,3)$ статического гамильтониана H_0 изучаемой системы в качестве исходного базиса 3-мерного пространства $\mathbf{C}$ чистых квантовых состояний. Ей соответствует эрмитовый A-базис (базисные операторы A_{mm}, X_{mn}, Y_{mn}) 9-мерного пространства $\mathbf{H}$ всех эрмитовых операторов [1]. На A_{mm} натянуто 3-мерное коммутативное пространство $\mathbf{H}_A \subset \mathbf{H}$, содержащее H_0. Так как $\operatorname{tr} H_0=0$, то H_0 локализован в 2-мерном подпространстве $\mathbf{H}_A{}^0 \subset \mathbf{H}_A$. Ортогональным базисом для $\mathbf{H}_A{}^0$ могут служить операторы

$$Z_{mn}=(1/2)(A_{mm}-A_{nn}), \tag{10.1}$$

$$Q_{mn}=(2/3)(Z_{mk}-Z_{kn}). \tag{10.2}$$

Отметим, что скалярные произведения

$$(Z_{mn}, Z_{mn})=(X_{mn}, X_{mn})=(Y_{mn}, Y_{mn})=1/2, \tag{10.3}$$

$$(Q_{mn}, Q_{mn})=2/3. \tag{10.4}$$

Собственным векторам a_m, a_k, a_n соответствуют собственные значения оператора Z_{mn} $(+1/2,\ 0,\ -1/2)$ и собственные значения оператора Q_{mn} $(+1/3,\ -2/3,\ +1/3)$.

Поскольку имеется три перехода $m \to n$, следовательно, существует и три типа базисов (10.1) и (10.2). Ниже будет показано в качестве типичного примера разложение $H_0 \in \mathbf{H}_A{}^0$ по базису перехода $2 \to 3$

$$H_0=\omega_L^0 Z_{23}+\omega_S^0 Q_{23}, \tag{10.5}$$

где

$$\omega_L^0=\omega_{23}^0=\omega_2^0-\omega_3^0, \tag{10.6}$$

$$\omega_S^0 = (1/2)(\omega_{21}^0 - \omega_{13}^0), \tag{10.7}$$

а $\omega_m{}^0$ — собственное значение оператора H_0.

Согласно Ф. Д. Мойнихену [2], любой $U \in \mathfrak{u}_3$ может быть представлен в виде произведения

$$U = U_A T, \tag{10.8}$$

где

$$U_A = \exp[-i \sum_m \alpha_m A_{mm}], \tag{10.9}$$

$$T = T_{23}(\varphi_{23}, \sigma_{23}) T_{12}(\varphi_{12}, \sigma_{12}) T_{13}(\varphi_{13}, \sigma_{13}), \tag{10.10}$$

$$T_{mn}(\varphi_{mn}, \sigma_{mn}) = \exp[-i2\varphi_{mn} Y_{mn}(\sigma_{mn})]. \tag{10.11}$$

Входящие в (10.10) угловые параметры φ_{mn}, σ_{mn} группы $\mathfrak{u}_3$ могут изменяться в пределах

$$-\pi \leqslant \varphi_{13}, \varphi_{23} \leqslant \pi, \tag{10.12}$$

$$-\pi/2 \leqslant \varphi_{12}, \sigma_{mn} \leqslant \pi/2. \tag{10.13}$$

Между угловыми параметрами α_m существует зависимость

$$\sum_m \alpha_m = 0, \tag{10.14}$$

обеспечивающая унимодулярность оператора U_A.

Пара операторов $X_{mn}(\sigma_{mn})$, $Y_{mn}(\sigma_{mn})$ получается путем «правого поворота» $X_{mn} \to Y_{mn}$ пары X_{mn}, Y_{mn} на угол σ_{mn}. Сокращенно:

$$X_{mn} \xrightarrow{\sigma_{mn}} Y_{mn}. \tag{10.15}$$

С помощью той же сокращенной символики действие супероператора $\mathfrak{T}_{mn}(\varphi_{mn}, \sigma_{mn})$ оператора (10.11) на элементы A-базиса записывается так:

$$Z_{mn} \xrightarrow{2\varphi_{mn}} X_{mn}(\sigma_{mn}), \tag{10.16}$$

$$X_{mk}(\sigma) \xrightarrow{\varphi_{mn}} X_{kn}(\sigma), \tag{10.17}$$

$$Y_{mk}(\sigma) \xleftarrow{\varphi_{mn}} Y_{kn}(\sigma). \tag{10.18}$$

Действие $\mathfrak{T}_{mn}(\varphi_{mn}, \sigma_{mn})$ в натянутом на X_{mk}, Y_{mk}, X_{kn}, Y_{kn} подпространстве $\mathbf{H}(mk, kn)$ не зависит от угла σ_{mn}. Поэтому не только X_{mk}, X_{kn} и Y_{mk}, Y_{kn}, но и любые $X_{mk}(\sigma)$, $X_{kn}(\sigma)$ и $Y_{mk}(\sigma)$, $Y_{kn}(\sigma)$ являются плоскостями вращения.

Несколько слов о порядке индексов m, n операторов X_{mn}, Y_{mn}. В конкретных случаях придерживаемся порядка $m < n$. При переходе от общих формул к конкретным следует учитывать, что

$$X_{nm} = X_{mn}, \quad Y_{nm} = -Y_{mn}. \tag{10.19}$$

Унитарное преобразование

$$e_m^{(3)} = Ta_m \tag{10.20}$$

переводит a_m в новый базис $e_m^{(3)} \in \mathbf{C}$, имеющий некоторую «унитарную ориентацию» относительно «системы отсчета» a_m. Унитарная ориентация определяется шестью параметрами φ_{mn}, σ_{mn} оператора (10.10). Соответствующий (10.10) супероператор $\mathfrak{T}$ переводит A-базис в новый

$E^{(3)}$-базис пространства **H** (базисные операторы: $E^{(3)}_{mm'}$, $X^{(3)}_{mn}$, $Y^{(3)}_{mn}$). В частности, подпространство $\mathbf{H}^0_A$ переводится в подпространство $\mathbf{H}^0_{F3}$, его базис типа (10.1), (10.2) обозначаем как $Z^{(3)}_{mn}$, $Q^{(3)}_{mn}$.

Ниже будут применены три базиса $e^{(j)}_m$ ($j = 1, 2, 3$) вместе с соответствующими $E^{(j)}$-базисами и подпространствами $\mathbf{H}^0_{Fj}$. Мы их определяем согласно формулам

$$e^{(1)}_m = T_{23} a_m, \tag{10.21}$$

$$e^{(2)}_m = T'_{12} e^{(1)}_{m}, \tag{10.22}$$

$$e^{(3)}_m = T''_{13} e^{(2)}_{m}, \tag{10.23}$$

где

$$T'_{12} = T_{23} T_{12} T^{-1}_{23}, \tag{10.24}$$

$$T''_{13} = (T_{23} T_{12}) T_{13} (T_{23} T_{12})^{-1}. \tag{10.25}$$

Так как

$$T = T''_{13} T'_{12} T_{23}, \tag{10.26}$$

то (10.20) согласуется с (10.23).
Итак, $\mathfrak{T}'_{12}$ совершает преобразование типа (10.16)—(10.18) над $E^{(1)}$-базисом. При этом $mn = 12$ (см. табл. 1). Аналогично, $\mathfrak{T}_{13}''$ преобразует $E^{(2)}$-базис в $E^{(3)}$-базис (см. табл. 2).

Таблица 1

$E^{(1)}$-базис пространства H на языке A-базиса (преобразование $\mathfrak{T}_{23}$)

Операторы $E^{(1)}$-базиса	Операторы A-базиса	Угол поворота
$Z^{(1)}_{23}$, $X^{(1)}_{23}$ (σ_{23})	Z_{23}, $X_{23}(\sigma_{23})$	$2\varphi_{23}$
$X^{(1)}_{12}$, $X^{(1)}_{13}$	X_{12}, X_{13}	φ_{23}
$Y^{(1)}_{12}$, $Y^{(1)}_{13}$	Y_{12}, Y_{13}	φ_{23}

$Q^{(1)}_{23} = Q_{23}$ $\qquad$ $Y^{(1)}_{23}(\sigma_{23}) = Y_{23}(\sigma_{23})$

Таблица 2

$E^{(2)}$-базис пространства H на языке $E^{(1)}$-базиса (преобразование $\mathfrak{T}'_{12}$)

Операторы $E^{(2)}$-базиса	Операторы $E^{(1)}$-базиса	Угол поворота
$Z^{(2)}_{12}$, $X^{(2)}_{12}$ (σ_{12})	$Z^{(1)}_{12}$, $X^{(1)}_{12}$ (σ_{12})	$2\varphi_{12}$
$X^{(2)}_{13}$, $X^{(2)}_{23}$	$X^{(1)}_{13}$, $X^{(1)}_{23}$	φ_{12}
$Y^{(2)}_{13}$, $Y^{(2)}_{23}$	$Y^{(1)}_{13}$, $Y^{(1)}_{23}$	φ_{12}

$Q^{(2)}_{12} = Q^{(1)}_{12}$ $\qquad$ $Y^{(2)}_{12}(\sigma_{12}) = Y^{(1)}_{12}(\sigma_{12})$

Разъясним смысл сокращенной записи, например, в табл. 1. По данным второго ряда имеем

$$
\begin{aligned}
X_{12}^{(1)} &= \cos\varphi_{23} X_{12} + \sin\varphi_{23} X_{13},\\
X_{13}^{(1)} &= -\sin\varphi_{23} X_{12} + \cos\varphi_{23} X_{13},
\end{aligned}
\tag{10.27}
$$

а последний ряд показывает, что 2-мерное подпространство над Q_{23}, $Y_{23}(\sigma_{23})$ не изменяется под влиянием $\mathfrak{T}_{23}$.

Преобразование $\mathfrak{T}_{23}$ базиса Q_{23}, Z_{23} подпространства $\mathbf{H}_A{}^0$ приводит к базису Q_{23}, $Z_{23}^{(1)}$ подпространства $\mathbf{H}_{F1}{}^0$. Совершая с помощью формул

$$
\begin{aligned}
Q_{23}^{(1)} &= -(1/2)\, Q_{12}^{(1)} - Z_{12}^{(1)},\\
Z_{23}^{(1)} &= (3/4)\, Q_{12}^{(1)} - (1/2)\, Z_{12}^{(1)}
\end{aligned}
\tag{10.28}
$$

переход к базису $Q_{12}^{(1)}$, $Z_{12}^{(1)}$ того же подпространства, сможем удобным образом применять преобразование $\mathfrak{T}'_{12}$ к $E^{(1)}$-базису. Аналогично, преобразование базисов подпространства $\mathbf{H}_{F2}^{0}$

$$
\begin{aligned}
Q_{13}^{(2)} &= -(1/2)\, Q_{12}^{(1)} + Z_{12}^{(2)},\\
Z_{13}^{(2)} &= (3/4)\, Q_{12}^{(1)} + (1/2)\, Z_{12}^{(2)}
\end{aligned}
\tag{10.29}
$$

позволяет прилагать $\mathfrak{T}_{13}''$ к $E^{(2)}$-базису, чтобы получить $E^{(3)}$-базис. К этому базису относятся, в частности, операторы

$$
\begin{aligned}
Q_{13}^{(3)} &= Q_{13}^{(2)},\\
Z_{13}^{(3)} &= \cos 2\varphi_{13} Z_{13}^{(2)} + \sin 2\varphi_{13} X_{13}^{(2)}(\sigma_{13}),
\end{aligned}
\tag{10.30}
$$

составляющие базис подпространства $\mathbf{H}_{F3}^{0}$.

В подпространстве $\mathbf{H}_{F3}^{0}$ локализованы все эрмитовые операторы, унитарная ориентация которых задана шестью параметрами φ_{mn}, σ_{mn}. В частности, эти параметры и «естественные популяции» π_m, определяемые по

$$
\varrho(0)\, e_m^{(3)} = \pi_m e_m^{(3)},
\tag{10.31}
$$

задают любое начальное состояние $\varrho(0)$ оператора плотности $\varrho(t)$ изучаемой системы. Стало быть,

$$
\varrho(0) = (1/3)E + \varrho_S(0)\, Q_{13}^{(2)} + \varrho_L(0)\, Z_{13}^{(2)} \in \mathbf{H}_{F3}^{0},
\tag{10.32}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\varrho_L(0) &= \pi_{13} = \pi_1 - \pi_3,\\
\varrho_S(0) &= (1/2)(\pi_{12} - \pi_{23}).
\end{aligned}
\tag{10.33}
$$

Относительно $E^{(2)}$-базиса имеем

$$
\begin{aligned}
\varrho(0) = (1/3)E &+ [(3/4)\varrho_L(0)\cos 2\varphi_{13} - (1/2)\varrho_S(0)]\, Q_{12}^{(1)} +\\
&+ [(1/2)\varrho_L(0)\cos 2\varphi_{13} + \varrho_S(0)]\, Z_{12}^{(2)} +\\
&+ \varrho_L(0)\sin 2\varphi_{13} X_{13}^{(2)}(\sigma_{13}).
\end{aligned}
\tag{10.34}
$$

10.2. Групповой подход. Перечислим методические принципы группового подхода [1] применительно к динамике трехуровневой системы (см. также [3]).

1. Компактное описание движения в пространстве **C** достигается применением пропагаторов $D(t,0) \in \mathbf{u}_3$. Их супероператоры $\mathfrak{R}(t,0)$ определяют целые семейства траекторий:

$$\varrho(t) = \mathfrak{R}(t,0)\varrho(0). \tag{10.35}$$

Каждый $\mathfrak{R}(t,0)$ соответствует некоторому гамильтониану $H(t) \in \mathbf{u}_3{}^0$.
2. Основная задача динамики сводится тем самым к установлению соответствий

$$H(t) = H_0 + H_E(t) \leftrightarrow D(t,0) \to \mathfrak{R}(t,0). \tag{10.36}$$

3. Если входящие в (10.36) величины выражены на языке A-базиса, то преобразования типа (10.35) описывают динамику абстрактной трехуровневой системы. Получается зависимость $\mathfrak{R}(t,0)$ от возбуждения $H_E(t)$, заданного относительно H_0 как характеристики системы.
4. Если рассматриваемая трехуровневая система является ядерным спином 1, то установление соответствия между A-базисом и составленным из спиновых тензоров I-базисом [1] позволяет дать физическую интерпретацию выводам абстрактной динамики.

5. Представления динамической группы $\mathbf{u}_2$ (двухуровневой системы) над группой $\mathbf{u}_3$ описывают более простые поддинамики трехуровневой системы. Перечень этих поддинамик дан в п. 10.3.

6. Пропагаторы $D(t,0) \in \mathbf{u}_3$ более общего вида могут быть построены в виде произведения пропагаторов, относящихся к различным представлениям $\mathbf{u}_2$ (см. п. 10.4).

10.3. Представления динамики $\mathbf{u}_2$. Прилагаем алгебру Ли $\mathbf{u}_3{}^0$ для составления списка всех представлений $\mathbf{u}_2{}^0$ над $\mathbf{u}_3{}^0$. Ищем сначала все такие базисы Z, X, Y представлений $\mathbf{G}^0$ алгебры $\mathbf{u}_2{}^0$, у которых $Z \in \mathbf{H}_A{}^0$ (система представлений **G**, примыкающих к A-базису).

Базисные операторы выбираем с одинаковой нормой

$$(Z,Z) = (X,X) = (Y,Y) = \eta^2 \tag{10.37}$$

и с алгеброй Ли $\mathbf{u}_2{}^0$

$$-i[Z,X] = Y, \quad -i[Z,Y] = -X, \quad -i[X,Y] = Z. \tag{10.38}$$

Алгебра Ли $\mathbf{u}_3{}^0$ определяется следующей системой коммутационных соотношений:

$$-i[H_0, X_{mn}] = \overset{0}{\omega}_{mn} Y_{mn}, \tag{10.39}$$

$$-i[H_0, Y_{mn}] = -\overset{0}{\omega}_{mn} X_{mn}, \tag{10.40}$$

$$-i[X_{mn}, Y_{mn}] = Z_{mn}, \tag{10.41}$$

$$-i[X_{mk}, X_{kn}] = (1/2)\, Y_{mn}, \tag{10.42}$$

$$-i[Y_{mk}, Y_{kn}] = -(1/2)\, Y_{mn}, \tag{10.43}$$

$$-i[X_{mk}, Y_{kn}] = -(1/2)\, X_{mn}, \tag{10.44}$$

$$-i[Y_{mk}, X_{kn}] = -(1/2)\, X_{mn}. \tag{10.45}$$

Отметим попутно, что формулы (10.39)—(10.45) остаются верными и в более общем случае алгебры Ли $\mathfrak{u}_d^0$, $d > 3$. Для полноты характеристики $\mathfrak{u}_d^0$ следует добавить правило: базисные операторы несвязанных переходов коммутируют друг с другом.

Применение соотношений (10.39)—(10.45) позволяет установить существование только двух типов вышеупомянутых представлений $\mathbf{G}^0$ (со свойством $Z \in \mathbf{H}_A{}^0$) — типа $\mathbf{G}_L{}^0(mn)$ и типа $\mathbf{G}^0(mk, kn)$. В случае $\mathbf{G}^0 = \mathbf{G}_L{}^0(mn)$ имеем $\eta^2 = 1/2$, $Z = Z_{mn}$, $X = X_{mn}$, $Y = Y_{mn}$. Так как Q_{mn} коммутирует со всеми элементами $\mathbf{G}_L{}^0(mn)$, то включение его в список базисных операторов расширяет $\mathbf{G}_L{}^0(mn)$ до 4-мерного приводимого представления $\mathbf{G}^0(mn)$.

Супероператорное представление соответствующей подгруппы $\mathbf{G}(mn)$ распадается на три неприводимых подпространства

$$\mathfrak{u}_3^0 = \mathbf{S}^0(mn) \dotplus \mathbf{G}_L^0(mn) \dotplus \mathbf{H}(mk, kn), \tag{10.46}$$

из которых 1-мерное $\mathbf{S}^0(mn)$ натянуто на Q_{mn}, 3-мерное $\mathbf{G}_L{}^0(mn)$ — на Z_{mn}, X_{mn}, Y_{mn}, а 4-мерное $\mathbf{H}(mk, kn)$ опирается на X_{mk}, Y_{mk}, X_{kn} и Y_{kn}.

В случае же $\mathbf{G}^0 = \mathbf{G}^0(mk, kn)$ имеем $\eta^2 = 2$. Все базисы Z, X, Y могут быть выведены исходя из базиса

$$Z = 2Z_{mn}, \tag{10.47}$$

$$X = X_1(mn) = \sqrt{2}\,(X_{mk} + X_{kn}), \tag{10.48}$$

$$Y = Y_1(mn) = \sqrt{2}\,(Y_{mk} + Y_{kn}). \tag{10.49}$$

С этой целью следует воспользоваться преобразованием (10.9):

$$X = \mathfrak{U}_A X_1(mn), \tag{10.50}$$

$$Y = \mathfrak{U}_A Y_1(mn). \tag{10.51}$$

Частным случаем операторов (10.50) и (10.51) является пара

$$X = X_2(mn) = \sqrt{2}\,(X_{mk} - X_{kn}), \tag{10.52}$$

$$Y = Y_2(mn) = \sqrt{2}\,(Y_{mk} - Y_{kn}). \tag{10.53}$$

Четыре оператора (10.48), (10.49), (10.52), (10.53) образуют ортогональный базис подпространства $\mathbf{H}(mk, kn)$.

Супероператорное представление подгруппы типа $\mathbf{G}(mk, kn)$ распадается на два неприводимых подпространства: на 3-мерное $\mathbf{G}^0(mk, kn)$ и на 5-мерное ортогональное дополнение к нему. Представление изоморфно к тензорному представлению группы $\mathbf{d}_3$ (т. е. группы $SO(3)$) — подпространство $\mathbf{G}^0(mk, kn)$ преобразуется как 3-мерные евклидовые векторы, а его ортогональное дополнение — как неприводимые (евклидовые) тензоры второго ранга.

Подведем итоги. К A-базису примыкает целая система представлений динамики $\mathfrak{u}_2$. Эта система распадается на подсистемы по трем переходам $m \to n$. Каждому базису (10.1), (10.2) подпространства $\mathbf{H}_A{}^0$ соответствует одна такая подсистема. Каждая подсистема состоит из поддинамики $\mathbf{G}(mn)$ и однопараметрического множества поддинамик типа $\mathbf{G}(mk, kn)$. Во главе всей системы — подпространство $\mathbf{H}_A{}^0$.

Преобразование (10.20) переводит систему представлений $\mathbf{G}$, примыкающих к A-базису, к системе представлений $\mathbf{G}_T$, примыкающих к $E^{(3)}$-базису, возглавляемому подпространством $\mathbf{H}^0_{F3}$. Придавая оператору T все «значения», допускаемые формулой (10.10), получаем все множество представлений группы $\mathfrak{u}_2$. Чтобы иметь все различные супероператоры, достаточно взять параметры Мойнихена в пределах

$$-\pi/2 \leqslant \varphi_{mn}, \sigma_{mn} \leqslant \pi/2. \tag{10.54}$$

10.4. Обобщенный двойной резонанс. Рассмотрим движения, описываемые пропагаторами типа

$$D(t,0) = D_1(t,0) D_2(t,0) D_3(t,0), \tag{10.55}$$

где

$$D_1(t,0) = \exp(-itG_1) \in \mathbf{G}(23), \tag{10.56}$$

$$D_2(t,0) = \exp(-itG_2) \in \mathbf{G}(23), \mathbf{G}_T(12), \tag{10.57}$$

$$D_3(t,0) = \exp(-itF_2) \in \mathbf{G}_T(12) \tag{10.58}$$

и

$$G_1 = \nu_1 Z_{23} - \nu_S Q_{23} \in \mathbf{H}^0_A, \tag{10.59}$$

$$G_2 = \nu_2 Z^{(1)}_{12} \in \mathbf{H}^0_{F1}, \tag{10.60}$$

$$F_2 = \omega^{(2)}_L Z^{(2)}_{12} + \omega^{(2)}_S Q^{(1)}_{12} \in \mathbf{H}^0_{F2}. \tag{10.61}$$

Пропагатор (10.55) состоит из мультипликативных компонент (10.56)—(10.58), относящихся к поддинамикам $\mathbf{G}(23)$ и $\mathbf{G}_T(12)$. При этом компонента (10.57) принадлежит к обеим поддинамикам. Индекс T, в данном случае, означает $T = T_{23}$.

Пропагатору (10.55) соответствует супероператор

$$\mathfrak{R}(t,0) = \mathfrak{R}_1(t,0) \mathfrak{R}_2(t,0) \mathfrak{R}_3(t,0), \tag{10.62}$$

где $\mathfrak{R}_j(t,0)$ $(j = 1, 2, 3)$ — супероператор оператора $D_j(t,0)$.

Соответствующий прапагатору (10.55) гамильтониан имеет вид суммы

$$H(t) = G_1 + \mathfrak{R}_1(t,0) G_2 + \mathfrak{R}_1(t,0) \mathfrak{R}_2(t,0) F_2. \tag{10.63}$$

Если же из (10.63) выделить независящую от времени часть $H_0 \in \mathbf{H}_A{}^0$, то гамильтониан примет следующий вид:

$$H(t) = H_0 + H_1(t) + H_2(t), \tag{10.64}$$

где

$$H_1(t) = \mathfrak{R}_1(t,0) V_1, \tag{10.65}$$

$$H_2(t) = \mathfrak{R}_1(t,0) \mathfrak{R}_2(t,0) V_2, \tag{10.66}$$

и

$$V_1 = h_1 X_{23}(\sigma_{23}) \in \mathbf{G}^0(23), \tag{10.67}$$

$$V_2 = h_2 X^{(1)}_{12}(\sigma_{12}) \in \mathbf{G}^0_T(12). \tag{10.68}$$

Выберем (10.64)—(10.68) за исходное определение гамильтониана и введем еще эрмитовый оператор

$$F_1 = H_0 - G_1 + V_1 = \omega^{(1)}_L Z^{(1)}_{12} + \omega^{(1)}_S Q^{(1)}_{12} \in \mathbf{H}^0_{F1}. \tag{10.69}$$

Тогда частотные параметры операторов F_1, F_2 вычисляются по формулам

$$\omega^{(1)}_S = \omega^{(2)}_S = (1/2)\Delta\nu_S + (3/4)\sqrt{(\Delta\nu_1)^2 + h_1^2}, \tag{10.70}$$

$$\omega^{(1)}_L = \Delta\nu_S - (1/2)\sqrt{(\Delta\nu_1)^2 + h_1^2}, \tag{10.71}$$

Таблица 3

Угловые частоты вращений, совершаемые супероператорами $\mathfrak{R}_j(t, 0)$

Переход $m \to n$	$\mathfrak{R}_1(t, 0)$	$\mathfrak{R}_2(t, 0)$	$\mathfrak{R}_3(t, 0)$
$1 \to 2$	$\nu_S - (1/2)\nu_1$	ν_2	$\omega_{12}^{(2)} = \omega_L^{(2)}$
$2 \to 3$	ν_1	$-(1/2)\nu_2$	$\omega_{23}^{(2)} = \omega_S^{(2)} - (1/2)\omega_L^{(2)}$
$1 \to 3$	$\nu_S + (1/2)\nu_1$	$(1/2)\nu_2$	$\omega_{13}^{(2)} = \omega_S^{(2)} + (1/2)\omega_L^{(2)}$

Таблица 4

Характеристики оператора плотности (10.81)

Вращение	$\overset{q}{\nu}_{mn}$	$\overset{q}{\beta}_{mn}$	$\overset{q}{\varrho}_{mn}$
	ν_1	σ_{23}	$(1/2)\varrho_L(0)\cos 2\varphi_{13} - \varrho_S(0)$
$X_{23} \to Y_{23}$	$\nu_1 - (1/2)\nu_2 + \omega_{13}^{(2)}$	σ_{13}	$(1/2)\varrho_L(0)\sin 2\varphi_{13}\sin\varphi_{12}(\cos 2\varphi_{23} + 1)$
	$\nu_1 + (1/2)\nu_2 - \omega_{13}^{(2)}$	$2\sigma_{23} - \sigma_{13}$	$(1/2)\varrho_L(0)\sin 2\varphi_{13}\sin\varphi_{12}(\cos 2\varphi_{23} - 1)$
$X_{12} \to Y_{12}$	$\nu_S - (1/2)\nu_1 + \nu_2$	σ_{12}	$[(1/2)\varrho_L(0)\cos 2\varphi_{13} + \varrho_S(0)]\sin 2\varphi_{12}\cos\varphi_{23}$
	$\nu_S - (1/2)(\nu_1 - \nu_2) + \omega_{13}^{(2)}$	σ_{13}	$-\varrho_L(0)\sin 2\varphi_{13}\cos\varphi_{12}\sin\varphi_{23}$
$X_{13} \to Y_{13}$	$\nu_S + (1/2)\nu_1 + \nu_2$	σ_{12}	$[(1/2)\varrho_L(0)\cos 2\varphi_{13} + \varrho_S(0)]\sin 2\varphi_{12}\sin\varphi_{23}$
	$\nu_S + (1/2)(\nu_1 + \nu_2) + \omega_{13}^{(2)}$	σ_{13}	$\varrho_L(0)\sin 2\varphi_{13}\cos\varphi_{12}\cos\varphi_{23}$

$$\omega_L^{(2)} = \sqrt{(\Delta\nu_2)^2 + h_2^2}, \tag{10.72}$$

где

$$\Delta\nu_S = \omega_S^0 - \nu_S, \tag{10.73}$$

$$\Delta\nu_1 = \overset{0}{\omega}_L - \nu_1, \tag{10.74}$$

$$\Delta\nu_2 = \omega_L^{(1)} - \nu_2, \tag{10.75}$$

а углы φ_{mn} — по формулам

$$\tan 2\varphi_{23} = h_1/\Delta\nu_1, \tag{10.76}$$

$$\tan 2\varphi_{12} = h_2/\Delta\nu_2. \tag{10.77}$$

Супероператор $\mathfrak{R}_1(t, 0)$ совершает вращение $X_{mn} \to Y_{mn}$ A-базиса, оставляя $\mathbf{H}_A{}^0$ неизменным. Аналогично, $\mathfrak{R}_2(t, 0)$ вращает $E^{(1)}$-базис, а $\mathfrak{R}_3(t, 0)$ — $E^{(2)}$-базис. При этом неизменными остаются $\mathbf{H}_{F1}^0$ и $\mathbf{H}_{F2}^0$ соответственно (см. табл. 3).

Компоненты возбуждения (10.65) и (10.66) выражаются в виде

$$H_1(t) = h_1[\cos(\nu_1 t + \sigma_{23})X_{23} + \sin(\nu_1 t + \sigma_{23})Y_{23}], \tag{10.78}$$

$$\begin{aligned} H_2(t) = h_2\cos\varphi_{23}[\cos(\nu_{12}t + \sigma_{12})X_{12} + \sin(\nu_{12}t + \sigma_{12})Y_{12}] + \\ + h_2\sin\varphi_{23}[\cos(\nu_{13}t + \sigma_{12})X_{13} + \sin(\nu_{13}t + \sigma_{12})Y_{13}], \end{aligned} \tag{10.79}$$

где

$$\nu_{12} = \nu_S - (1/2)\nu_1 + \nu_2, \quad \nu_{13} = \nu_S + (1/2)\nu_1 + \nu_2. \tag{10.80}$$

Оператор плотности задается формулой

$$\varrho(t) = \varrho_A(t) + \sum_{m<n} \sum_{q} \varrho^q_{mn} [\cos(\nu^q_{mn} t + \beta^q_{mn}) X_{mn} + \sin(\nu^q_{mn} t + \beta^q_{mn}) Y_{mn}] \qquad (10.81)$$

и параметрами, приведенными в табл. 4.

Компонента $\varrho_A(t) \in \mathbf{H}_A$ в формуле (10.81) имеет вид

$$\begin{aligned}\varrho_A(t) = (1/3)E - [(3/4)\varrho_L(0)\cos 2\varphi_{13} + (1/2)\varrho_S(0)]Q_{23} + \\ + [(1/2)\varrho_L(0)\cos 2\varphi_{13} - \varrho_S(0)]Z_{23} - \\ - \varrho_L(0)\sin 2\varphi_{13}\sin\varphi_{12}\sin 2\varphi_{23} \times \\ \times \cos[(\omega^{(2)}_{13} - (1/2)\nu_2)t + (\sigma_{13} - \sigma_{23})]Z_{23}.\end{aligned} \qquad (10.82)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Синивеэ В., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 24, № 1, 35—48 (1975).
2. Murnaghan, F. D., The unitary and rotation groups, Washington, Spartan books, 1962.
3. Wei, J., Norman, E., J. Math. Phys., 4, № 4, 575—581 (1963).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
4/XII 1978

V. SINIVEE

RÜHMADE TEOORIA RAKENDAMISEST MITMESPINNISÜSTEEMIDE DÜNAAMIKA UURIMISEKS. VI

Artiklis on käsitletud kolme nivooga kvantsüsteemi dünaamikat.

V. SINIVEE

GROUP APPROACH IN DYNAMICS OF MANY-SPIN SYSTEMS. VI

The dynamics of abstract three-level systems governed by a broad class of time-dependent Hamiltonians is considered. The propagators are constructed as products of exponentials. The corresponding time-dependent orthogonal transformations, which describe the motion of the density operator, are given in terms of rotating bases of the 9-dimensional space of hermitian operators. A list of subdynamics described by propagators which belong to representations of $SU(2)$ in $SU(3)$ is given.