EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 28. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1979, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 28
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1979, № 2

УДК 539.28

*В. СИНИВЕЭ*

# ГРУППОВОЙ ПОДХОД В ДИНАМИКЕ МНОГОСПИНОВЫХ СИСТЕМ. VI

*(Представлена Э. Липпмаа)*

Тема данной статьи — динамика абстрактной трехуровневой системы — не исчерпывается изложенным. Здесь рассматривается широкий класс пропагаторов, построенных в виде произведения трех экспонент, и дается перечень более простых поддинамик, описываемых пропагаторами представлений группы $SU(2)$ в группе $SU(3)$.

## 10. Динамика трехуровневой системы

**10.1.** Супероператорное представление группы $\mathbf{u}_3$. Выберем совокупность собственных векторов $a_m$ $(m=1,2,3)$ статического гамильтониана $H_0$ изучаемой системы в качестве исходного базиса 3-мерного пространства **C** чистых квантовых состояний. Ей соответствует эрмитовый $A$-базис (базисные операторы $A_{mm}$, $X_{mn}$, $Y_{mn}$) 9-мерного пространства **H** всех эрмитовых операторов [1]. На $A_{mm}$ натянуто 3-мерное коммутативное пространство $\mathbf{H}_A \subset \mathbf{H}$, содержащее $H_0$. Так как $\operatorname{tr} H_0=0$, то $H_0$ локализован в 2-мерном подпространстве $\mathbf{H}_A{}^0 \subset \mathbf{H}_A$. Ортогональным базисом для $\mathbf{H}_A{}^0$ могут служить операторы

$$Z_{mn}=(1/2)(A_{mm}-A_{nn}), \tag{10.1}$$

$$Q_{mn}=(2/3)(Z_{mk}-Z_{kn}). \tag{10.2}$$

Отметим, что скалярные произведения

$$(Z_{mn},Z_{mn})=(X_{mn},X_{mn})=(Y_{mn},Y_{mn})=1/2, \tag{10.3}$$

$$(Q_{mn},Q_{mn})=2/3. \tag{10.4}$$

Собственным векторам $a_m$, $a_k$, $a_n$ соответствуют собственные значения оператора $Z_{mn}$ $(+1/2,\ 0,\ -1/2)$ и собственные значения оператора $Q_{mn}$ $(+1/3,\ -2/3,\ +1/3)$.

Поскольку имеется три перехода $m\to n$, следовательно, существует и три типа базисов (10.1) и (10.2). Ниже будет показано в качестве типичного примера разложение $H_0 \in \mathbf{H}_A{}^0$ по базису перехода $2\to 3$

$$H_0=\omega^0_L Z_{23}+\omega^0_S Q_{23}, \tag{10.5}$$

где

$$\omega^0_L=\omega^0_{23}=\omega^0_2-\omega^0_3, \tag{10.6}$$

$$\omega_S^0 = (1/2)(\omega_{21}^0 - \omega_{13}^0), \tag{10.7}$$

а $\omega_m{}^0$ — собственное значение оператора $H_0$.

Согласно Ф. Д. Мойнихену [2], любой $U \in \mathfrak{u}_3$ может быть представлен в виде произведения

$$U = U_A T, \tag{10.8}$$

где

$$U_A = \exp[-i \sum_m \alpha_m A_{mm}], \tag{10.9}$$

$$T = T_{23}(\varphi_{23}, \sigma_{23}) T_{12}(\varphi_{12}, \sigma_{12}) T_{13}(\varphi_{13}, \sigma_{13}), \tag{10.10}$$

$$T_{mn}(\varphi_{mn}, \sigma_{mn}) = \exp[-i2\varphi_{mn} Y_{mn}(\sigma_{mn})]. \tag{10.11}$$

Входящие в (10.10) угловые параметры $\varphi_{mn}$, $\sigma_{mn}$ группы $\mathfrak{u}_3$ могут изменяться в пределах

$$-\pi \leqslant \varphi_{13}, \varphi_{23} \leqslant \pi, \tag{10.12}$$

$$-\pi/2 \leqslant \varphi_{12}, \sigma_{mn} \leqslant \pi/2. \tag{10.13}$$

Между угловыми параметрами $\alpha_m$ существует зависимость

$$\sum_m \alpha_m = 0, \tag{10.14}$$

обеспечивающая унимодулярность оператора $U_A$.

Пара операторов $X_{mn}(\sigma_{mn})$, $Y_{mn}(\sigma_{mn})$ получается путем «правого поворота» $X_{mn} \to Y_{mn}$ пары $X_{mn}, Y_{mn}$ на угол $\sigma_{mn}$. Сокращенно:

$$X_{mn} \xrightarrow{\sigma_{mn}} Y_{mn}. \tag{10.15}$$

С помощью той же сокращенной символики действие супероператора $\mathfrak{T}_{mn}(\varphi_{mn}, \sigma_{mn})$ оператора (10.11) на элементы $A$-базиса записывается так:

$$Z_{mn} \xrightarrow{2\varphi_{mn}} X_{mn}(\sigma_{mn}), \tag{10.16}$$

$$X_{mk}(\sigma) \xrightarrow{\varphi_{mn}} X_{kn}(\sigma), \tag{10.17}$$

$$Y_{mk}(\sigma) \xleftarrow{\varphi_{mn}} Y_{kn}(\sigma). \tag{10.18}$$

Действие $\mathfrak{T}_{mn}(\varphi_{mn}, \sigma_{mn})$ в натянутом на $X_{mk}$, $Y_{mk}$, $X_{kn}$, $Y_{kn}$ подпространстве $\mathbf{H}(mk, kn)$ не зависит от угла $\sigma_{mn}$. Поэтому не только $X_{mk}, X_{kn}$ и $Y_{mk}$, $Y_{kn}$, но и любые $X_{mk}(\sigma)$, $X_{kn}(\sigma)$ и $Y_{mk}(\sigma)$, $Y_{kn}(\sigma)$ являются плоскостями вращения.

Несколько слов о порядке индексов $m, n$ операторов $X_{mn}, Y_{mn}$. В конкретных случаях придерживаемся порядка $m < n$. При переходе от общих формул к конкретным следует учитывать, что

$$X_{nm} = X_{mn}, \quad Y_{nm} = -Y_{mn}. \tag{10.19}$$

Унитарное преобразование

$$e_m^{(3)} = T a_m \tag{10.20}$$

переводит $a_m$ в новый базис $e_m^{(3)} \in \mathbf{C}$, имеющий некоторую «унитарную ориентацию» относительно «системы отсчета» $a_m$. Унитарная ориентация определяется шестью параметрами $\varphi_{mn}$, $\sigma_{mn}$ оператора (10.10). Соответствующий (10.10) супероператор $\mathfrak{T}$ переводит $A$-базис в новый

$E^{(3)}$-базис пространства **H** (базисные операторы: $E^{(3)}_{mm'}$, $X^{(3)}_{mn'}$, $Y^{(3)}_{mn}$). В частности, подпространство $\mathbf{H}^0_A$ переводится в подпространство $\mathbf{H}^0_{F3}$, его базис типа (10.1), (10.2) обозначаем как $Z^{(3)}_{mn'}$, $Q^{(3)}_{mn}$.

Ниже будут применены три базиса $e^{(j)}_m$ $(j = 1, 2, 3)$ вместе с соответствующими $E^{(j)}$-базисами и подпространствами $\mathbf{H}^0_{Fj}$. Мы их определяем согласно формулам

$$e^{(1)}_m = T_{23} a_m, \tag{10.21}$$

$$e^{(2)}_m = T'_{12} e^{(1)}_{m'}, \tag{10.22}$$

$$e^{(3)}_m = T''_{13} e^{(2)}_{m'}, \tag{10.23}$$

где

$$T'_{12} = T_{23} T_{12} T^{-1}_{23}, \tag{10.24}$$

$$T''_{13} = (T_{23} T_{12}) T_{13} (T_{23} T_{12})^{-1}. \tag{10.25}$$

Так как

$$T = T''_{13} T'_{12} T_{23}\ , \tag{10.26}$$

то (10.20) согласуется с (10.23).
Итак, $\mathfrak{T}'_{12}$ совершает преобразование типа (10.16)—(10.18) над $E^{(1)}$-базисом. При этом $mn = 12$ (см. табл. 1). Аналогично, $\mathfrak{T}_{13}''$ преобразует $E^{(2)}$-базис в $E^{(3)}$-базис (см. табл. 2).

*Таблица 1*

**$E^{(1)}$-базис пространства H на языке $A$-базиса (преобразование $\mathfrak{T}_{23}$)**

| Операторы $E^{(1)}$-базиса | Операторы $A$-базиса | Угол поворота |
|---|---|---|
| $Z^{(1)}_{23}$, $X^{(1)}_{23}(\sigma_{23})$ | $Z_{23}$, $X_{23}(\sigma_{23})$ | $2\varphi_{23}$ |
| $X^{(1)}_{12}$, $X^{(1)}_{13}$ | $X_{12}$, $X_{13}$ | $\varphi_{23}$ |
| $Y^{(1)}_{12}$, $Y^{(1)}_{13}$ | $Y_{12}$, $Y_{13}$ | $\varphi_{23}$ |

$Q^{(1)}_{23} = Q_{23}$ $\qquad$ $Y^{(1)}_{23}(\sigma_{23}) = Y_{23}(\sigma_{23})$

*Таблица 2*

**$E^{(2)}$-базис пространства H на языке $E^{(1)}$-базиса (преобразование $\mathfrak{T}'_{12}$)**

| Операторы $E^{(2)}$-базиса | Операторы $E^{(1)}$-базиса | Угол поворота |
|---|---|---|
| $Z^{(2)}_{12}$, $X^{(2)}_{12}(\sigma_{12})$ | $Z^{(1)}_{12}$, $X^{(1)}_{12}(\sigma_{12})$ | $2\varphi_{12}$ |
| $X^{(2)}_{13}$, $X^{(2)}_{23}$ | $X^{(1)}_{13}$, $X^{(1)}_{23}$ | $\varphi_{12}$ |
| $Y^{(2)}_{13}$, $Y^{(2)}_{23}$ | $Y^{(1)}_{13}$, $Y^{(1)}_{23}$ | $\varphi_{12}$ |

$Q^{(2)}_{12} = Q^{(1)}_{12}$ $\qquad$ $Y^{(2)}_{12}(\sigma_{12}) = Y^{(1)}_{12}(\sigma_{12})$

Разъясним смысл сокращенной записи, например, в табл. 1. По данным второго ряда имеем

$$X^{(1)}_{12}=\cos\varphi_{23}X_{12}+\sin\varphi_{23}X_{13},$$
$$X^{(1)}_{13}=-\sin\varphi_{23}X_{12}+\cos\varphi_{23}X_{13}, \tag{10.27}$$

а последний ряд показывает, что 2-мерное подпространство над $Q_{23}$, $Y_{23}(\sigma_{23})$ не изменяется под влиянием $\mathfrak{T}_{23}$.

Преобразование $\mathfrak{T}_{23}$ базиса $Q_{23}$, $Z_{23}$ подпространства $\mathbf{H}_A{}^0$ приводит к базису $Q_{23}$, $Z_{23}{}^{(1)}$ подпространства $\mathbf{H}_{F1}{}^0$. Совершая с помощью формул

$$Q^{(1)}_{23}=-(1/2)\,Q^{(1)}_{12}-Z^{(1)}_{12},$$
$$Z^{(1)}_{23}=(3/4)\,Q^{(1)}_{12}-(1/2)\,Z^{(1)}_{12} \tag{10.28}$$

переход к базису $Q^{(1)}_{12}$, $Z^{(1)}_{12}$ того же подпространства, сможем удобным образом применять преобразование $\mathfrak{T}'_{12}$ к $E^{(1)}$-базису. Аналогично, преобразование базисов подпространства $\mathbf{H}^0_{F2}$

$$Q^{(2)}_{13}=-(1/2)\,Q^{(1)}_{12}+Z^{(2)}_{12},$$
$$Z^{(2)}_{13}=(3/4)\,Q^{(1)}_{12}+(1/2)\,Z^{(2)}_{12} \tag{10.29}$$

позволяет прилагать $\mathfrak{T}_{13}''$ к $E^{(2)}$-базису, чтобы получить $E^{(3)}$-базис. К этому базису относятся, в частности, операторы

$$Q^{(3)}_{13}=Q^{(2)}_{13},$$
$$Z^{(3)}_{13}=\cos 2\varphi_{13}Z^{(2)}_{13}+\sin 2\varphi_{13}X^{(2)}_{13}(\sigma_{13}), \tag{10.30}$$

составляющие базис подпространства $\mathbf{H}^0_{F3}$.

В подпространстве $\mathbf{H}^0_{F3}$ локализованы все эрмитовые операторы, унитарная ориентация которых задана шестью параметрами $\varphi_{mn}$, $\sigma_{mn}$. В частности, эти параметры и «естественные популяции» $\pi_m$, определяемые по

$$\varrho(0)\,e^{(3)}_m=\pi_m e^{(3)}_m, \tag{10.31}$$

задают любое начальное состояние $\varrho(0)$ оператора плотности $\varrho(t)$ изучаемой системы. Стало быть,

$$\varrho(0)=(1/3)\,E+\varrho_S(0)\,Q^{(2)}_{13}+\varrho_L(0)\,Z^{(2)}_{13}\in\mathbf{H}^0_{F3}, \tag{10.32}$$

где

$$\varrho_L(0)=\pi_{13}=\pi_1-\pi_3,$$
$$\varrho_S(0)=(1/2)\,(\pi_{12}-\pi_{23}). \tag{10.33}$$

Относительно $E^{(2)}$-базиса имеем

$$\begin{aligned}\varrho(0)=(1/3)E&+[(3/4)\varrho_L(0)\cos 2\varphi_{13}-(1/2)\varrho_S(0)]\,Q^{(1)}_{12}+\\&+[(1/2)\varrho_L(0)\cos 2\varphi_{13}+\varrho_S(0)]\,Z^{(2)}_{12}+\\&+\varrho_L(0)\sin 2\varphi_{13}X^{(2)}_{13}(\sigma_{13}).\end{aligned} \tag{10.34}$$

**10.2.** Групповой подход. Перечислим методические принципы группового подхода [1] применительно к динамике трехуровневой системы (см. также [3]).

1. Компактное описание движения в пространстве **C** достигается применением пропагаторов $D(t, 0) \in \mathbf{u}_3$. Их супероператоры $\mathfrak{R}(t, 0)$ определяют целые семейства траекторий:

$$\varrho(t) = \mathfrak{R}(t, 0)\varrho(0). \tag{10.35}$$

Каждый $\mathfrak{R}(t, 0)$ соответствует некоторому гамильтониану $H(t) \in \mathbf{u}_3^0$.
2. Основная задача динамики сводится тем самым к установлению соответствий

$$H(t) = H_0 + H_E(t) \leftrightarrow D(t, 0) \rightarrow \mathfrak{R}(t, 0). \tag{10.36}$$

3. Если входящие в (10.36) величины выражены на языке $A$-базиса, то преобразования типа (10.35) описывают динамику абстрактной трехуровневой системы. Получается зависимость $\mathfrak{R}(t, 0)$ от возбуждения $H_E(t)$, заданного относительно $H_0$ как характеристики системы.
4. Если рассматриваемая трехуровневая система является ядерным спином 1, то установление соответствия между $A$-базисом и составленным из спиновых тензоров $I$-базисом [1] позволяет дать физическую интерпретацию выводам абстрактной динамики.

5. Представления динамической группы $\mathbf{u}_2$ (двухуровневой системы) над группой $\mathbf{u}_3$ описывают более простые поддинамики трехуровневой системы. Перечень этих поддинамик дан в п. 10.3.

6. Пропагаторы $D(t, 0) \in \mathbf{u}_3$ более общего вида могут быть построены в виде произведения пропагаторов, относящихся к различным представлениям $\mathbf{u}_2$ (см. п. 10.4).
**10.3.** Представления динамики $\mathbf{u}_2$. Прилагаем алгебру Ли $\mathbf{u}_3^0$ для составления списка всех представлений $\mathbf{u}_2^0$ над $\mathbf{u}_3^0$. Ищем сначала все такие базисы $Z$, $X$, $Y$ представлений $\mathbf{G}^0$ алгебры $\mathbf{u}_2^0$, у которых $Z \in \mathbf{H}_A^0$ (система представлений $\mathbf{G}$, примыкающих к $A$-базису).

Базисные операторы выбираем с одинаковой нормой

$$(Z, Z) = (X, X) = (Y, Y) = \eta^2 \tag{10.37}$$

и с алгеброй Ли $\mathbf{u}_2^0$

$$-i[Z, X] = Y, \quad -i[Z, Y] = -X, \quad -i[X, Y] = Z. \tag{10.38}$$

Алгебра Ли $\mathbf{u}_3^0$ определяется следующей системой коммутационных соотношений:

$$-i[H_0, X_{mn}] = \overset{0}{\omega}_{mn} Y_{mn}, \tag{10.39}$$

$$-i[H_0, Y_{mn}] = -\overset{0}{\omega}_{mn} X_{mn}, \tag{10.40}$$

$$-i[X_{mn}, Y_{mn}] = Z_{mn}, \tag{10.41}$$

$$-i[X_{mk}, X_{kn}] = (1/2)\, Y_{mn}, \tag{10.42}$$

$$-i[Y_{mk}, Y_{kn}] = -(1/2)\, Y_{mn}, \tag{10.43}$$

$$-i[X_{mk}, Y_{kn}] = -(1/2)\, X_{mn}, \tag{10.44}$$

$$-i[Y_{mk}, X_{kn}] = -(1/2)\, X_{mn}. \tag{10.45}$$

Отметим попутно, что формулы (10.39)—(10.45) остаются верными и в более общем случае алгебры Ли $\mathfrak{u}_d^0$, $d > 3$. Для полноты характеристики $\mathfrak{u}_d^0$ следует добавить правило: базисные операторы несвязанных переходов коммутируют друг с другом.

Применение соотношений (10.39)—(10.45) позволяет установить существование только двух типов вышеупомянутых представлений $\mathbf{G}^0$ (со свойством $Z \in \mathbf{H}_A{}^0$) — типа $\mathbf{G}_L{}^0(mn)$ и типа $\mathbf{G}^0(mk, kn)$. В случае $\mathbf{G}^0 = \mathbf{G}_L{}^0(mn)$ имеем $\eta^2 = 1/2$, $Z = Z_{mn}$, $X = X_{mn}$, $Y = Y_{mn}$. Так как $Q_{mn}$ коммутирует со всеми элементами $\mathbf{G}_L{}^0(mn)$, то включение его в список базисных операторов расширяет $\mathbf{G}_L{}^0(mn)$ до 4-мерного приводимого представления $\mathbf{G}^0(mn)$.

Супероператорное представление соответствующей подгруппы $\mathbf{G}(mn)$ распадается на три неприводимых подпространства

$$\mathfrak{u}_3^0 = \mathbf{S}^0(mn) \dotplus \mathbf{G}_L^0(mn) \dotplus \mathbf{H}(mk, kn), \tag{10.46}$$

из которых 1-мерное $\mathbf{S}^0(mn)$ натянуто на $Q_{mn}$, 3-мерное $\mathbf{G}_L{}^0(mn)$ — на $Z_{mn}$, $X_{mn}$, $Y_{mn}$, а 4-мерное $\mathbf{H}(mk, kn)$ опирается на $X_{mk}$, $Y_{mk}$, $X_{kn}$ и $Y_{kn}$.

В случае же $\mathbf{G}^0 = \mathbf{G}^0(mk, kn)$ имеем $\eta^2 = 2$. Все базисы $Z$, $X$, $Y$ могут быть выведены исходя из базиса

$$Z = 2Z_{mn}, \tag{10.47}$$

$$X = X_1(mn) = \sqrt{2}\,(X_{mk} + X_{kn}), \tag{10.48}$$

$$Y = Y_1(mn) = \sqrt{2}\,(Y_{mk} + Y_{kn}). \tag{10.49}$$

С этой целью следует воспользоваться преобразованием (10.9):

$$X = \mathfrak{U}_A X_1(mn), \tag{10.50}$$

$$Y = \mathfrak{U}_A Y_1(mn). \tag{10.51}$$

Частным случаем операторов (10.50) и (10.51) является пара

$$X = X_2(mn) = \sqrt{2}\,(X_{mk} - X_{kn}), \tag{10.52}$$

$$Y = Y_2(mn) = \sqrt{2}\,(Y_{mk} - Y_{kn}). \tag{10.53}$$

Четыре оператора (10.48), (10.49), (10.52), (10.53) образуют ортогональный базис подпространства $\mathbf{H}(mk, kn)$.

Супероператорное представление подгруппы типа $\mathbf{G}(mk, kn)$ распадается на два неприводимых подпространства: на 3-мерное $\mathbf{G}^0(mk, kn)$ и на 5-мерное ортогональное дополнение к нему. Представление изоморфно к тензорному представлению группы $\mathbf{d}_3$ (т. е. группы $SO(3)$) — подпространство $\mathbf{G}^0(mk, kn)$ преобразуется как 3-мерные евклидовые векторы, а его ортогональное дополнение — как неприводимые (евклидовые) тензоры второго ранга.

Подведем итоги. К $A$-базису примыкает целая система представлений динамики $\mathfrak{u}_2$. Эта система распадается на подсистемы по трем переходам $m \to n$. Каждому базису (10.1), (10.2) подпространства $\mathbf{H}_A{}^0$ соответствует одна такая подсистема. Каждая подсистема состоит из поддинамики $\mathbf{G}(mn)$ и однопараметрического множества поддинамик типа $\mathbf{G}(mk, kn)$. Во главе всей системы — подпространство $\mathbf{H}_A{}^0$.

Преобразование (10.20) переводит систему представлений $\mathbf{G}$, примыкающих к $A$-базису, к системе представлений $\mathbf{G}_T$, примыкающих к $E^{(3)}$-базису, возглавляемому подпространством $\mathbf{H}_{F3}^0$. Придавая оператору $T$ все «значения», допускаемые формулой (10.10), получаем все множество представлений группы $\mathfrak{u}_2$. Чтобы иметь все различные суператоры, достаточно взять параметры Мойнихена в пределах

$$-\pi/2 \leqslant \varphi_{mn}, \sigma_{mn} \leqslant \pi/2. \qquad (10.54)$$

**10.4.** Обобщенный двойной резонанс. Рассмотрим движения, описываемые пропагаторами типа

$$D(t,0) = D_1(t,0) D_2(t,0) D_3(t,0), \qquad (10.55)$$

где

$$D_1(t,0) = \exp(-itG_1) \in \mathbf{G}(23), \qquad (10.56)$$

$$D_2(t,0) = \exp(-itG_2) \in \mathbf{G}(23), \mathbf{G}_T(12), \qquad (10.57)$$

$$D_3(t,0) = \exp(-itF_2) \in \mathbf{G}_T(12) \qquad (10.58)$$

и

$$G_1 = \nu_1 Z_{23} - \nu_S Q_{23} \in \mathbf{H}^0_A, \qquad (10.59)$$

$$G_2 = \nu_2 Z^{(1)}_{12} \in \mathbf{H}^0_{F1}, \qquad (10.60)$$

$$F_2 = \omega^{(2)}_L Z^{(2)}_{12} + \omega^{(2)}_S Q^{(1)}_{12} \in \mathbf{H}^0_{F2}. \qquad (10.61)$$

Пропагатор (10.55) состоит из мультипликативных компонент (10.56)—(10.58), относящихся к поддинамикам $\mathbf{G}(23)$ и $\mathbf{G}_T(12)$. При этом компонента (10.57) принадлежит к обеим поддинамикам. Индекс $T$, в данном случае, означает $T = T_{23}$.

Пропагатору (10.55) соответствует супероператор

$$\mathfrak{R}(t,0) = \mathfrak{R}_1(t,0) \mathfrak{R}_2(t,0) \mathfrak{R}_3(t,0), \qquad (10.62)$$

где $\mathfrak{R}_j(t,0)$ $(j = 1, 2, 3)$ — супероператор оператора $D_j(t,0)$.

Соответствующий прапагатору (10.55) гамильтониан имеет вид суммы

$$H(t) = G_1 + \mathfrak{R}_1(t,0) G_2 + \mathfrak{R}_1(t,0) \mathfrak{R}_2(t,0) F_2. \qquad (10.63)$$

Если же из (10.63) выделить независящую от времени часть $H_0 \in \mathbf{H}_A{}^0$, то гамильтониан примет следующий вид:

$$H(t) = H_0 + H_1(t) + H_2(t), \qquad (10.64)$$

где

$$H_1(t) = \mathfrak{R}_1(t,0) V_1, \qquad (10.65)$$

$$H_2(t) = \mathfrak{R}_1(t,0) \mathfrak{R}_2(t,0) V_2, \qquad (10.66)$$

и

$$V_1 = h_1 X_{23}(\sigma_{23}) \in \mathbf{G}^0(23), \qquad (10.67)$$

$$V_2 = h_2 X^{(1)}_{12}(\sigma_{12}) \in \mathbf{G}^0_T(12). \qquad (10.68)$$

Выберем (10.64)—(10.68) за исходное определение гамильтониана и введем еще эрмитовый оператор

$$F_1 = H_0 - G_1 + V_1 = \omega^{(1)}_L Z^{(1)}_{12} + \omega^{(1)}_S Q^{(1)}_{12} \in \mathbf{H}^0_{F1}. \qquad (10.69)$$

Тогда частотные параметры операторов $F_1, F_2$ вычисляются по формулам

$$\omega^{(1)}_S = \omega^{(2)}_S = (1/2)\Delta\nu_S + (3/4)\sqrt{(\Delta\nu_1)^2 + h_1^2}, \qquad (10.70)$$

$$\omega^{(1)}_L = \Delta\nu_S - (1/2)\sqrt{(\Delta\nu_1)^2 + h_1^2}, \qquad (10.71)$$

*Таблица 3*

**Угловые частоты вращений, совершаемые супероператорами $\mathfrak{R}_j(t, 0)$**

| Переход $m\to n$ | $\mathfrak{R}_1(t, 0)$ | $\mathfrak{R}_2(t, 0)$ | $\mathfrak{R}_3(t, 0)$ |
|---|---|---|---|
| $1\to 2$ | $\nu_S-(1/2)\nu_1$ | $\nu_2$ | $\omega_{12}^{(2)}=\omega_L^{(2)}$ |
| $2\to 3$ | $\nu_1$ | $-(1/2)\nu_2$ | $\omega_{23}^{(2)}=\omega_S^{(2)}-(1/2)\omega_L^{(2)}$ |
| $1\to 3$ | $\nu_S+(1/2)\nu_1$ | $(1/2)\nu_2$ | $\omega_{13}^{(2)}=\omega_S^{(2)}+(1/2)\omega_L^{(2)}$ |

*Таблица 4*

**Характеристики оператора плотности (10.81)**

| Вращение | $\overset{q}{\nu}_{mn}$ | $\overset{q}{\beta}_{mn}$ | $\overset{q}{\varrho}_{mn}$ |
|---|---|---|---|
| | $\nu_1$ | $\sigma_{23}$ | $(1/2)\varrho_L(0)\cos 2\varphi_{13}-\varrho_S(0)$ |
| $X_{23}\to Y_{23}$ | $\nu_1-(1/2)\nu_2+\omega_{13}^{(2)}$ | $\sigma_{13}$ | $(1/2)\varrho_L(0)\sin 2\varphi_{13}\sin\varphi_{12}(\cos 2\varphi_{23}+1)$ |
| | $\nu_1+(1/2)\nu_2-\omega_{13}^{(2)}$ | $2\sigma_{23}-\sigma_{13}$ | $(1/2)\varrho_L(0)\sin 2\varphi_{13}\sin\varphi_{12}(\cos 2\varphi_{23}-1)$ |
| $X_{12}\to Y_{12}$ | $\nu_S-(1/2)\nu_1+\nu_2$ | $\sigma_{12}$ | $[(1/2)\varrho_L(0)\cos 2\varphi_{13}+\varrho_S(0)]\sin 2\varphi_{12}\cos\varphi_{23}$ |
| | $\nu_S-(1/2)(\nu_1-\nu_2)+\omega_{13}^{(2)}$ | $\sigma_{13}$ | $-\varrho_L(0)\sin 2\varphi_{13}\cos\varphi_{12}\sin\varphi_{23}$ |
| $X_{13}\to Y_{13}$ | $\nu_S+(1/2)\nu_1+\nu_2$ | $\sigma_{12}$ | $[(1/2)\varrho_L(0)\cos 2\varphi_{13}+\varrho_S(0)]\sin 2\varphi_{12}\sin\varphi_{23}$ |
| | $\nu_S+(1/2)(\nu_1+\nu_2)+\omega_{13}^{(2)}$ | $\sigma_{13}$ | $\varrho_L(0)\sin 2\varphi_{13}\cos\varphi_{12}\cos\varphi_{23}$ |

$$\omega_L^{(2)}=\sqrt{(\Delta\nu_2)^2+h_2^2}, \tag{10.72}$$

где

$$\Delta\nu_S=\omega_S^0-\nu_S, \tag{10.73}$$

$$\Delta\nu_1=\overset{0}{\omega}_L-\nu_1, \tag{10.74}$$

$$\Delta\nu_2=\omega_L^{(1)}-\nu_2, \tag{10.75}$$

а углы $\varphi_{mn}$ — по формулам

$$\tan 2\varphi_{23}=h_1/\Delta\nu_1, \tag{10.76}$$

$$\tan 2\varphi_{12}=h_2/\Delta\nu_2. \tag{10.77}$$

Супероператор $\mathfrak{R}_1(t, 0)$ совершает вращение $X_{mn}\to Y_{mn}$ $A$-базиса, оставляя $\mathbf{H}_A{}^0$ неизменным. Аналогично, $\mathfrak{R}_2(t, 0)$ вращает $E^{(1)}$-базис, а $\mathfrak{R}_3(t, 0)$ — $E^{(2)}$-базис. При этом неизменными остаются $\mathbf{H}_{F1}^0$ и $\mathbf{H}_{F2}^0$ соответственно (см. табл. 3).

Компоненты возбуждения (10.65) и (10.66) выражаются в виде

$$H_1(t)=h_1[\cos(\nu_1 t+\sigma_{23})X_{23}+\sin(\nu_1 t+\sigma_{23})Y_{23}], \tag{10.78}$$

$$\begin{aligned}H_2(t)=h_2\cos\varphi_{23}[\cos(\nu_{12}t+\sigma_{12})X_{12}+\sin(\nu_{12}t+\sigma_{12})Y_{12}]+\\+h_2\sin\varphi_{23}[\cos(\nu_{13}t+\sigma_{12})X_{13}+\sin(\nu_{13}t+\sigma_{12})Y_{13}],\end{aligned} \tag{10.79}$$

где

$$\nu_{12}=\nu_S-(1/2)\nu_1+\nu_2,\qquad \nu_{13}=\nu_S+(1/2)\nu_1+\nu_2. \tag{10.80}$$

Оператор плотности задается формулой

$$\varrho(t)=\varrho_A(t)+\sum_{m<n}\sum_{q}\varrho^q_{mn}[\cos(\nu^q_{mn}t+\beta^q_{mn})X_{mn}+ \\ +\sin(\nu^q_{mn}t+\beta^q_{mn})Y_{mn}] \quad (10.81)$$

и параметрами, приведенными в табл. 4.

Компонента $\varrho_A(t)\in\mathbf{H}_A$ в формуле (10.81) имеет вид

$$\varrho_A(t)=(1/3)E-[(3/4)\varrho_L(0)\cos 2\varphi_{13}+(1/2)\varrho_S(0)]Q_{23}+ \\ +[(1/2)\varrho_L(0)\cos 2\varphi_{13}-\varrho_S(0)]Z_{23}- \\ -\varrho_L(0)\sin 2\varphi_{13}\sin\varphi_{12}\sin 2\varphi_{23}\times \\ \times\cos[(\omega^{(2)}_{13}-(1/2)\nu_2)t+(\sigma_{13}-\sigma_{23})]Z_{23}. \quad (10.82)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Синивеэ В., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 24, № 1, 35—48 (1975).
2. Murnaghan, F. D., The unitary and rotation groups, Washington, Spartan books, 1962.
3. Wei, J., Norman, E., J. Math. Phys., 4, № 4, 575—581 (1963).

*Институт кибернетики*
*Академии наук Эстонской ССР*

Поступила в редакцию
4/XII 1978

*V. SINIVEE*

**RÜHMADE TEOORIA RAKENDAMISEST MITMESPINNISÜSTEEMIDE DÜNAAMIKA UURIMISEKS. VI**

Artiklis on käsitletud kolme nivooga kvantsüsteemi dünaamikat.

*V. SINIVEE*

**GROUP APPROACH IN DYNAMICS OF MANY-SPIN SYSTEMS. VI**

The dynamics of abstract three-level systems governed by a broad class of time-dependent Hamiltonians is considered. The propagators are constructed as products of exponentials. The corresponding time-dependent orthogonal transformations, which describe the motion of the density operator, are given in terms of rotating bases of the 9-dimensional space of hermitian operators. A list of subdynamics described by propagators which belong to representations of $SU(2)$ in $SU(3)$ is given.